

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

F. A. Klingensfeld.

Band III.

Mit vier Tafeln.

Nürnberg.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

1876.



Vorwort.

Nachdem die beiden ersten Bände dieses Lehrbuches neue Auflagen erforderten, die dem Bedürfnisse technischer Hochschulen entsprechende Erweiterungen erleiden mussten, und an diesen Schulen auch die Schattenkonstruktion und Perspektive gelehrt werden, war ich von vornherein darauf angewiesen, den beiden ersten Bänden dieses Buches einen dritten Band — die Gesetze der Schattenkonstruktion und Perspektive enthaltend — anzufügen, und bedarf also die Herausgabe dieses Bandes keiner besonderen Rechtfertigung.

Wenn auch in diesem Buche nichts wesentlich Neues auftritt, so wird der sachkundige Leser doch vieles eigenthümlich behandelt, manche Bezeichnung übersichtlich und praktisch finden, besonders aber sich überzeugen, dass ich bestrebt war, Alles hieher Gehörige in logischer Ordnung und klarer Auseinandersetzung auf möglichst kleinem Raume zu geben.

In der Parallelperspektive habe ich die Axonometrie keiner näheren Auseinandersetzung für nöthig gehalten, da ich nicht einsehen kann, wozu man den Schüler noch mit der Axonometrie plagen soll, nachdem wir an der Hand des Pohlke'schen Satzes uns in der Parallelperspektive vollkommen frei bewegen können, d. h. die Maßstäbe für X' , Y' , Z' und die Winkel dieser drei Richtungen unabhängig von

einander annehmen können, während uns die Axonometrie die Hände bindet, indem wir aus jenen Maßstäben die genannten Winkel, oder umgekehrt erst suchen müssen. Ausserdem ist es ja für den Techniker am Zweckmässigsten die isometrische Projektion oder die Kavalierperspektive anzuwenden, oder mindestens die drei Maßstäbe gleich zu machen, und die Winkel beliebig so anzunehmen, dass das erhaltene Bild möglichst hübsch ausfällt.

Als ich die Bearbeitung des ersten Bandes dieses Lehrbuches begann, nahm ich mir vor, in dem vorliegenden dritten Bande ein Verzeichniss der die darstellende Geometrie betreffenden Literatur zu geben. Dies ist aber gegenwärtig überflüssig geworden, nachdem Herr Fiedler in seinem vor trefflichen Werke über darstellende Geometrie, das seitdem erschienen, ein solches Literatur-Verzeichniss in höchster Ausführlichkeit gegeben hat.

Indem ich noch der Verlagshandlung für die hübsche Ausstattung dieses Bandes meine Anerkennung ausspreche; übergebe ich auch diesen letzten Band meinen Schülern als Leitfaden und meinen Fachgenossen zu wohlwollender Beurtheilung.

München, Juli 1875.

Der Verfasser.

Inhalt.

Sechster Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

§ 30. Streifschattengrenzen.

	Seite
Nr. 457—458. Einleitung	1
460—461. Annahme der Lichtstrahlen	3
462. Streifschattengrenze; Schattenlinie, Schattenkante.....	4
463. Reele und virtuelle Schattengrenze	5
464. Darstellung der Schattenlinie.....	6
465. Grenzpunkte auf der Schattenkante	6
466. Aufsuchung der Schattenkanten	7
467. Auf welcher Seite Schatten?	8

§ 31. Schlagschatten.

Nr.	468. Schlagschattengrenze	9
	469. Konstruktion der Schlagschattengrenzen	9
	470. Keine Schattengrenze im Schatten	10
471—472.	Aufeinanderfolgende Operationen und Beispiele	11
	474. Schlagschatten auf $\mathfrak{L}_1$	13
474—476.	Mittelst Schlagschatten auf $\mathfrak{L}_1$ die Schattengrenze selbst	14

§ 32. Schattenstriche.

Nr.	477. Schattenstriche sind an reelen Schattenkanten.....	17
	478. Schattenstriche eines Parallelepipeds	17
	479. Schattenstriche unterscheiden $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$	18
480—483.	Schattenstriche an verschiedenen Körpern	19

§ 33. Höchstes Licht und Isophoten.

Nr.	484. Lichtstärke.....	21
	485. Erklärung des höchsten Lichtes und der Isophoten .	23
	486. Ton des Risses einer Stelle gleich dem Tone der Stelle	23
	487. Isophoten einer entwickelbaren Fläche.....	24
488—489.	Höchstes Licht auf entwickelbaren Flächen	24
490—493.	Konstruktion dieses höchsten Lichtes	26
	494. Höchstes Licht auf nicht entwickelbaren Flächen ...	27
	495. Isophote bestimmter Qualität	28
496—499.	Isophoten bestimmter Qualitäten entwickelbarer Flächen	28
	500. desgleichen an Kugeln	30
501—502.	desgleichen an Drehflächen	31
	503. desgleichen an anderen Flächen.....	32

VII

§ 34. Ausführung der Schattirung.

		Seite
Nr. 504—	506. Töne im Lichte.....	33
	507. Reflexe.....	35
	508. Selbstschatten und Schlagschatten.....	35
	509. Töne im Schatten.....	36
	510. Zusammenstellung der Abtönungen.....	37
	511. Verschiedene Ausführungen.....	38
	512. Abtönung von Ebenen.....	38

§ 35. Ausgeführte Schattenkonstruktionen.

Nr.	513. Schatten auf einem mit einer viereckigen Platte bedeckten Cylinder.....	39
	514. Desgleichen auf einer Kugel.....	40
	515. Desgleichen auf einer hohlen Schaale.....	41
	516. Desgleichen auf einer Nische.....	42
	517. Desgleichen auf einer Konsole.....	43
	518. Desgl. auf einer Wulste mit Schlagschatten auf sich selbst.....	44

Siebenter Abschnitt.

Parallelperspektive.

§ 36. Allgemeine Erklärungen darüber.

Nr.	519. $\mathfrak{R}'$ auf einer $\mathfrak{Z}'$ die schief gegen X, Y Z,.....	46
	520—521. $\mathfrak{R}'$ eines Rechtseits (rechtwinkeliges Parallelepiped).....	46
	522—523. Pohlke'scher Satz.....	47
	524. Übersicht, Untersicht.....	49
	525. $\mathfrak{R}'$ von parallelen Strecken.....	49
	526. $\mathfrak{R}'$ eines Punktes auf X.....	50
	527. $\mathfrak{R}'$ eines beliebigen Punktes.....	50
	528. $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ aus $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}_1'$	51
	529. Mit dem Rechtseit beginnen.....	51
	530. Richtung der Stralen mittelst $\mathfrak{R}'$ aufsuchen.....	51

§ 37. Arten von Parallelperspektiven.

Nr.	531. Gleiche Massstäbe für X, Y, Z. Anm. Axonometrie.	52
	543—534 Isometrische Projektion und Kavalierperspektive....	53

§ 38. Parallelperspektivische Aufgaben.

Nr.	535. Pyramide auf einem Rechtseit.....	55
	526—538. Ebene Curven.....	56
	539. Schraubenlinie.....	59
	540. Konsole.....	59
	541. Cylinder auf Gehrung zusammengesetzt.....	60
	541—554. Kugel, Wulst und Drehfläche ..	60

§ 39. Schattenkonstruktion an Parallelperspektiven.

Nr.	545—546. Bemerkungen darüber.....	62
	547. $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}_1'$ eines Lichtstrals.....	62
	548. Schatten an einer Pyramide, auf einem Rechtseit stehend.....	63
	549—550. Desgleichen auf Drehungskegel und Konsole.....	64
	551. Desgleichen mittelst $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$	65

Achter Abschnitt.

Centralperspektive.

§ 40. Allgemeine Erklärungen.

	Seite
Nr. 552. Zeichnungen die auf das Auge gut wirken	66
553. Vorgang beim Sehen	66
554. Perspective ist Centraliss	67
555—558. Allgemeines über die Wahl der Tafel und des Centrums	68

§ 41. Aufsuchung von Centralperspectiven.

Nr. 559. Tafel ($\mathfrak{T}_2$), Auge, Augpunkt, Distanz, $\mathfrak{S}$	69
560. Sätze über Perspective	69
561. Perspective einer Geraden	72
562. Theilungspunkt, Theilungskreis	72
563. Bezeichnungen	73
563. Von einem beliebigen Punkte auf eine Gerade eine Strecke auftragen	74
565. Perspektive eines Punktes, Distanzpunkt	74
566. Gerade parallel zur Tafel	76

§ 42. Aufgaben.

Nr. 567. Bestimmungsart von Punkt, Gerade, Ebene	76
568—570. Verschiedene Aufgaben	77
571. Ebene senkrecht zur Geraden $\mathfrak{A}$	78
572. Weitere Aufgaben	79
573—574. Ebene Curven	80
575. Gewundene Curven	81
576—577. Kugel und Cylinder	81
578. Drehfläche	82
579. Kugel	83
580. Spiegelbild eines Punktes	84
581—582. Schatten an Perspectiven	84

§ 43. Ueber praktische Aufgaben aus der Perspektive.

Nr. 583. Allgemeines darüber	86
584—585. Annahme von O_1	86
586—587. Annahme von O_2 und $\mathfrak{T}$	88
588. Annahme von O und $\mathfrak{T}$	90
589. Perspektive eines Parallelepipedes	91
590. Perspektive vergrössern	92
591—594. Perspektive bei verjüngter Distanz	92
595. Perspective der Augen von Menschen auf gleicher Basis mit dem Zeichner	94
Nachtrag zur Schattenkonstruktion	95

Darstellende Geometrie.

Sechster Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

§ 30.

Streifschattengrenzen.

457. Die praktisch vorkommenden Körper sind meistens von mehreren Flächen begrenzt, die sich gegenseitig nach Linien (Kanten) schneiden. Wie wir von früher her wissen, haben wir zur graphischen Bestimmung eines solchen Körpers zu zeichnen:

- 1) Die Risse aller Körperkanten;
- 2) Die ersten und zweiten Umrisse *) aller den Körper begrenzenden Flächen.

Wenn wir nun, wie dies früher geschehen ist, die Linien des Körpers mit Buchstaben bezeichnen, und von den einzelnen Grenzflächen des Körpers die Namen nennen, und ihre Beziehungen zu den gezeichneten Linien angeben, so sind dadurch gewöhnlich die Gestalten dieser Flächen und damit die ganze Gestalt des Körpers bestimmt. Wie wir aber schon wissen, werden in der Praxis die einzelnen Linien eines Körpers nicht mit Buchstaben versehen; ausserdem werden gewöhnlich die Namen der gegebenen Flächen auch nicht angegeben. Somit

*) Wir wollen hier nochmals erklären, was wir unter einem Flächenumriss verstehen.

Denken wir uns an eine Fläche ($\mathcal{A}$) einen berührenden Cylinder ($\mathcal{B}$) gelegt, dessen Erzeugenden senkrecht zur ersten Tafel ($\mathcal{T}_1$) stehen, so nennen wir die Berührungslinie von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ das erste Profil von $\mathcal{A}$, und den Schnitt von $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{T}_1$, den ersten Umriss von $\mathcal{A}$.

geht die Gestalt des Körpers, trotz der richtig ausgeführten Zeichnung desselben, aus dieser nicht klar hervor, und sind wir darauf angewiesen, durch weitere Mittel jene Gestalt genauer zu bestimmen. Ein solches Mittel bietet uns die Schattenkonstruktion.

458. Betrachten wir nemlich den graphisch dargestellten Körper als undurchsichtig, und von einem leuchtenden Körper aus, der nach allen Richtungen hin, Stralen aussendet, beleuchtet, und unterscheiden wir in der Zeichnung durch ein passendes Mittel die beleuchteten Theile der Körperoberfläche von den beschatteten, d. h. die Theile zu denen das Licht gelangen kann, von denen, zu welchen das Licht keinen Zutritt findet, so lässt sich aus dieser Lichtvertheilung auf die Gestalt der Oberfläche schliessen. Es kann dann kommen, dass diese Schattenkonstruktion, im Verein mit den gezeichneten Rissen der Körperkanten und mit den Umrissen, die Gestalt des Körpers vollkommen bestimmen. Desshalb ist zu empfehlen, wie dies in der That in der Praxis immer mehr geschieht, die Schattenkonstruktion in den technischen Zeichnungen zu verwenden.

459. Um die Schattenkonstruktionen möglichst zu vereinfachen, setzen wir in den technischen Zeichnungen einen leuchtenden Körper voraus, wie ihn uns die Natur in der Sonne oder dem Monde darbietet, einen leuchtenden Körper also, der von unseren dargestellten Körpern so weit entfernt ist, dass wir alle leuchtenden Stralen als parallel ansehen können. Demnach haben wir zur Bestimmung der Lichtstralen nur ihre Richtung zu geben, d. h. eine Gerade, mit der alle Stralen parallel laufen. Bezüglich dieser Stralen-Richtung aber hat man für technische Zeichnungen ein Uebereinkommen getroffen, dem auch wir uns anschliessen wollen. Wir nehmen daher diese Richtung in folgender Art an.

Denkt man sich zwischen den beiden positiven Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) einen Würfel so aufgestellt, dass zwei seiner Flächen mit der $\mathfrak{T}_1$ und zwei derselben mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel laufen, und nennt man die Würfecke, welche links liegt und von den beiden Tafeln am weitesten entfernt ist, a, dagegen die Ecke rechts, welche den beiden Tafeln am nächsten liegt, b, so gibt uns die körperliche Würfel-Diagonale ab, und zwar in

der Richtung von a nach b die gewöhnliche Richtung der Lichtstrahlen an.

460. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Lichtstra- Fig. 177.
len, die wir bei der Schattenkonstruktion gewöhnlich anwenden, parallel sind zu einer Geraden ab, deren Risse so liegen, wie in unserer Zeichnung (Fig. 177), und demnach beide mit der Kante $\mathcal{R}$ (dem Schnitte beider Tafeln) Winkel von 45° einschliessen. Die den Rissen beigefügten Pfeile deuten an, dass die Richtung des Strales von a gegen b hin zu nehmen ist.

461. Obgleich wir unsere Lichtstrahlen gewöhnlich paral- Fig. 178.
lel voraussetzen, so wollen wir doch, der Allgemeinheit wegen, bei den nächstfolgenden Betrachtungen voraussetzen, dass die Strahlen von einem (in endlicher Ferne liegenden) leuchtenden Punkte ausgehen.

Denken wir uns nun einen leuchtenden Punkt a und einen Körper und legen wir durch a eine Ebene, die den Körper nach der geschlossenen Figur A (Fig. 178) schneidet (hier wie in der Folge soll durch die schräge Schraffirung angedeutet werden, dass auf der Seite der Linie A, auf welcher die Schraffirung liegt, die Materie des Körpers sich befindet, wie dies ja bei Durchschnitzzeichnungen üblich ist). Nehmen wir zunächst an, diese Figur sei so beschaffen, dass die sie einschliessende Linie A von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten wird und zeichnen eine Gerade B, welche A in den Punkten b, c schneidet, so wird ein in B liegender Lichtstral in b von der Materie des Körpers absorbiert, und daher nach c nicht mehr gelangen können. Ist also, wie wir voraussetzen, ausser dem Punkte a keine Lichtquelle vorhanden, so kann nach c gar kein Licht gelangen, und wird c daher im Schatten liegen, während der Punkt b, wo der Lichtstral B den Körper trifft beleuchtet ist. Denkt man sich nun von a aus nach A alle möglichen Strahlen gezogen, so wird man sich leicht überzeugen, dass hier die beiden Strahlen C und D, von denen jeder mit der Figur A einen einzigen Punkt gemein hat, ohne in die Materie des Körpers einzudringen, in unserer Ebene die äussersten Strahlen sind, welche die Figur A noch treffen, und dass die Punkte d und e, in welcher A von C und D getroffen wird, die Grenzen bilden zwischen dem beleuchteten und beschat-

teten Theil der Linie A. In der That wird jeder Punkt von A der zwischen d und e auf der Seite von b sich befindet, Licht empfangen, während die auf der Seite von c liegenden Punkte von keinem Lichtstrale getroffen werden könnten. Wir nennen daher c und d Schattengrenzen (auf der Linie A). Würde man durch a andere den Körper schneidende Ebenen legen, so erhielte man andere Punkte als Schattengrenzen; und man sieht, dass alle diese Punkte, die man von sämtlichen durch a möglichen und den Körper schneidenden Ebenen erhält, eine Linie bilden, die an der Grenze des Schattens und Lichtes liegt, und die wir daher die Schattengrenze des Körpers nennen.

Fig. 178. 462. Wir wollen von einem Strale, der wie C (oder D) einen Punkt d mit A gemein hat, aber so, dass die auf A zu beiden Seiten des Punktes d liegenden Nachbarpunkte von d auf einer Seite von C liegen, sagen, er streift den Körper. Wir nennen daher die Schattengrenzen, in denen die Lichtstralen den Körper streifen, die Streifschattengrenzen, (sie heissen auch Selbstschattengrenzen).

Wie man in unserer Zeichnung (Fig. 178) sieht, kann der streifende Stral, entweder, wie C, in dem gestreiften Punkte den Körper berühren, oder, wie D, durch einen Eckpunkt der Figur A gehen. Demnach besteht eine Linie einer Fläche, welche die Streifschattengrenze vorstellt, entweder aus lauter Punkten, in denen Lichtstralen berühren und ist also die Berührungslinie eines Kegels, der seine Spitze in a hat und den wir einen berührenden Stralenkegel (der natürlich, wenn a in unendlicher Ferne liegt, in einen Cylinder übergeht) nennen wollen; oder diese Grenze besteht aus lauter Punkten wie e, und sie ist demnach eine Kante des Körpers, d. h. eine Linie, in welcher sich zwei Flächen des Körpers schneiden (ausnahmsweise könnten auch diese Linie ein Grat, Rückkehrkante sein). Endlich kann die Schattengrenze auch zum Theile aus Punkten wie d, zum Theile aus solchen wie e bestehen, also zum Theile die Berührungslinie eines Stralenkegels, zum Theile eine Körperkante sein. Wir wollen nun festsetzen, dass wir jede Streifschattengrenze so weit sie Berührungslinie eines berührenden Kegels (oder Cylinders) ist, Schattenlinie, und

so weit sie eine Kante (oder ein Grat) des Körpers ist, Schattenkante nennen, und erfahren demnach Folgendes:

Es gibt zweierlei Streifschattengrenzen, nemlich Schattenlinien und Schattenkanten.

463. Die Schnittfigur in den beiden vorigen Nummern war Fig. 179. so beschaffen, dass jede Tangente in einem Punkte der Linie A in der Nachbarschaft des Berührungspunktes ausserhalb der Materie des Körpers liegt. Es kann aber auch sein, dass die Schnittfigur A (wie in Figur 179) von einer Geraden in vier (oder mehr) Punkten geschnitten werden kann. In einer solchen Linie A gibt es dann Strecken, deren Punkte so beschaffen sind, dass eine Tangente an einem solchem Punkte, z. B. die Tangente D, rechts und links vom Berührungspunkte d, in der Nachbarschaft dieses Punktes, in der Materie des Körpers steckt. Innerhalb einer solchen Strecke der Linie A nennen wir die Figur konkav, während wir diejenige Strecke, für welche die Tangenten ihrer Punkte in der nächsten Nähe des Berührungspunktes ausserhalb der Materie liegt, konvex nennen.

Zieht man nun vom leuchtenden Punkte a aus alle Streifstrahlen an A, so werden darunter solche Strahlen sein, die an einer konkaven Stelle streifen, wie der Stral D im Punkte d. Dann kann aber der Stral nicht zum Punkte d gelangen, da er schon in dem Punkte f, wo er in die Materie eintreten will, absorbiert worden ist. Ein solcher Streifpunkt, wie d, liegt daher im Schatten, und ist daher keine wirkliche Schattengrenze. Wir wollen aber hier fest setzen, dass wir einen solchen Streifpunkt, zu welchen weil er an einer konkaven Stelle liegt, ein Lichtstral nicht gelangen kann, und der also keine eigentliche Schattengrenze ist, eine virtuelle Schattengrenze nennen. Im Gegensatz dazu nennen wir alle wirklichen Schattengrenzen, reele Schattengrenzen.

Es ist demnach klar, dass wir nur die reelen Schattengrenzen, und nicht die virtuellen zu zeichnen brauchen. Weil wir aber den Körper, den wir mit Schatten versehen wollen, als undurchsichtig betrachten, so werden wir in seinem ersten (oder zweiten) Risse alle diejenigen Schattengrenzen weglassen, die in Bezug auf die erste (oder zweite) Tafel

unsichtbar sind, und die wir virtuel in Bezug auf die erste (oder zweite) Tafel nennen können.

464. Wollen wir nun einen Körper mit Schatten versehen, so müssen wir vor Allem seine Schattengrenzen angeben. Da aber zuvor der Körper vollständig gezeichnet sein muss, und demnach auch alle seine Kanten dargestellt sein müssen, so sind auch seine Schattenkanten schon gezeichnet, und haben wir nur zu untersuchen, welche der gezeichneten Kanten Schattenkanten sind. Was aber seine Schattenlinien anlangt, so sind diese, da sie zur Bestimmung des Körpers nicht gehören, zunächst nicht gezeichnet, sondern müssen erst, wenn man den Körper zu schattiren beabsichtigt, dargestellt werden. Wie dies aber geschieht, das geht aus dem oben Gesagten hervor. Denn wir haben oben gesehen, dass eine Schattenlinie die Berührungslinie einer Stralenfläche ist.

Setzen wir daher, wie schon oben gesagt, voraus, dass alle Stralen parallel laufen so finden wir:

1) die Schattenlinie auf einer entwickelbaren Fläche, wenn wir die Berührungserzeugenden aller mit dem Lichtstrale parallelen Berührungsebenen der Fläche aufsuchen. Es sind demnach die Schattenlinien von entwickelbaren Flächen (Cylinder, Kegel, Gratflächen) gerade Linien;

2) die Schattenlinie einer nicht entwickelbaren Fläche, wenn wir parallel zum Lichtstral an die Fläche einen berührenden Cylinder legen; die Berührungslinie dieses Cylinders, welche in der Regel eine Curve ist, stellt die Schattenlinie vor.

Sucht man für alle Begrenzungsflächen des Körpers auf die angegebene Art die Schattenlinien auf (die Art dieser Aufsuchung ist in § 23 des Band II. angegeben) so hat man alle möglichen Schattenlinien, von denen noch zu untersuchen wäre, welche von ihnen virtuel und daher unbrauchbar sind; von diesen wird man natürlich diejenigen gar nicht konstruiren, von denen man voraus weiss, dass sie zu den virtuelen gehören.

Fig. 180.

465. Hat man so alle Schattenlinien gefunden, nachdem schon voraus alle Körperkanten gezeichnet waren, so ist man im Besitze aller Linien des Körpers, auf denen die Streifschat-

tengrenzen liegen können, und ist nun zunächst die Frage zu beantworten, welche Körperkanten Schattenkanten sind?

Haben wir nun eine Körperkante und fragen wir, ob sie Schattenkante ist, oder nicht, so müssen wir uns sagen, dass sie ja auch möglicherweise zum Theile Schattenkante sein könnte, und zum Theile nicht. In diesem Falle aber muss es darauf Punkte geben, welche an den Grenzen beider Theile liegen. Sehen wir zu, wie wir diese Grenzpunkte einer Schattenkante finden.

Es sei die zu untersuchende Kante K der Schnitt zweier Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des Körpers und denken wir uns wieder eine Ebene angenommen, welche die Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des Körpers nach einer Linie AB (Fig. 180) schneidet, die in a ein (der zu untersuchenden Körperkante K angehöriges) Eck hat. Ist nun der in dieser Ebene liegende durch a gehende Lichtstral die Gerade C , so ist a ein Punkt der Schattenkante, da die Figur AB von C gestreift wird. Liegt aber für einen anderen Punkt der Kante der Lichtstral so wie D , der also nicht streift, so muss, wenn man vom ersten zum zweiten Punkte übergeht die verlangte Grenzstelle kommen, und für diese der Lichtstral so liegen, dass er die Linie A oder B im Punkte a berührt. Dann berührt aber auch dieser Grenzstral die Fläche $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, und sein Berührungspunkt gehört der Linie an, in welcher alle $\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{B}$) berührenden Stralen ihre Berührungspunkte haben, d. h. der Schattenlinie von $\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{B}$). Man sieht also:

Wenn eine Kante K (nach welcher sich zwei Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ eines Körpers schneiden) zum Theile Schattenkante ist, so liegen die Grenzpunkte der Schattenkante da, wo K von den Schattenlinien auf den Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ getroffen wird.

Wird demnach die K von den genannten Schattenlinien nicht getroffen, so gibt es auf ihr keine Grenzpunkte, woraus folgt, dass dann die ganze Kante K entweder Schattenlinie ist oder nicht. Wie man darüber entscheidet, wird die nächste Nummer lehren.

466. Will man bezüglich einer Kante K entscheiden, ob sie zwischen den gefundenen Grenzpunkten, (oder wenn sich solche nicht gefunden haben, ob sie ganz und gar) Schatten-

kante ist oder nicht, so darf man nur innerhalb der Grenzen (im letzteren Falle irgendwo auf ihr) einen Punkt *a* annehmen, und von diesem untersuchen, ob der Lichtstral an ihm streift oder nicht. Zu dem Ende legt man durch *a* (Fig. 180) einen Stral und durch diesen eine beliebige Ebene (am Besten eine Lothebene), sucht den Schnitt (AB) dieser Ebene mit dem Körper, und sieht zu ob der Lichtstrahl streift oder nicht (d. h. ob der Stral gegen AB wie C oder D liegt). Dabei braucht man von jeder der Linien A und B nur einen Punkt suchen, der dem *a* sehr nahe liegt, um die Untersuchung zu beenden. In den meistens vorkommenden praktischen Fällen aber können wir ohne eine solche Konstruktion zum Ziele kommen, wenn wir uns nur den Körper und den Lichtstral im Raume vorstellen, und dann (durch Anschauung) sehen, ob der Lichtstral an dem Punkte streift oder nicht, wie das später an Beispielen deutlich hervortreten wird.

Fig. 181. 467. Wir haben bisher die Wege angegeben, die man zu gehen hat, um sämtliche Streifschattengrenzen (Schattenlinien und Schattenkanten) auszumitteln. Da aber von diesen nur diejenigen Geltung haben, welche reel sind, so ist noch anzugeben, wie man herausfindet, ob eine gefundene Streifschattengrenze reel oder virtuel ist, möglicherweise auch, ob sie theilweise reel ist, und wo die Grenzpunkte des reelen Theiles liegen. Allein darüber können und werden wir erst später Aufschluss geben. Sobald aber noch dieser Aufschluss gegeben ist, entsteht noch die Frage, auf welcher Seite der reelen Schattengrenze Schatten und auf welcher Licht ist. Hierüber aber bekommen wir vollständig Aufschluss, wenn wir auf einer der beiden Flächen, die sich nach der betrachteten Kante schneiden, einen Punkt *a* annehmen, und untersuchen ob dieser im Schatten oder Licht liegt. Darüber gibt uns aber meistens wieder die Anschauung Aufschluss; wenn nicht, so verfahren wir ähnlich wie in voriger Nummer. Wir legen nemlich durch den Punkt einen Stral und durch den Stral eine Ebene (am Besten wieder eine Lothebene), suchen in der Nähe des Punktes *a* den Schnitt der Ebene mit dem Körper und geben an, auf welcher Seite des Schnittes die Materie liegt. Je nachdem dann der Lichtstral (wie in Fig. 181 a) den Punkt *a* trifft ehe er in

die Materie eindringt, oder (wie in Fig. 181 b) nachdem er schon in die Materie eingedrungen war, ist der Punkt beleuchtet oder beschattet.

§ 31.

Schlagschatten.

468. Ist die Figur A, nach welcher der Körper von einer Fig. 182. durch einen Stral B gelegten Ebene geschnitten wird, theilweise konkav (wie in Fig. 182), so kann es sein, dass der Stral B, welcher die Figur A in einem Punkte b streift, dieselbe noch in einem Punkte b' trifft, an welchem der Stral absorbirt wird. Man wird sich dann leicht überzeugen, dass dieser Punkt b' ebenfalls eine Schattengrenze ist. Denn nimmt man auf A in der Nachbarschaft von b', oberhalb und unterhalb b', einen Punkt an, so wird zum oberen ein Lichtstral gelangen können, zum unteren aber nicht (da der dem unteren Punkte entsprechende Stral schon in der Nähe von b absorbirt wird.) Die Erscheinung bliebe offenbar dieselbe, wenn wir zwei Körper hätten, und der Stral, der an dem einen in einem Punkte b streifte, den anderen in einem Punkte b' trafe; auch hier würde b' eine Schattengrenze vorstellen. Wir sehen demnach:

Wenn ein Lichtstral, der einen Körper in b streift, denselben (oder einen anderen) Körper in einem Punkte b' trifft, so ist b' eine Schattengrenze. Man nennt eine solche Schattengrenze, so wie eine Linie einer Fläche, welche lauter solche Schattengrenzen enthält, **Schlagschattengrenze**.

469. Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass man, um die Schlagschattengrenze auf einer Fläche $\mathfrak{A}$ zu erhalten, alle Streifstrahlen, annehmen muss, und dass der Schnitt, der (von sämtlichen Streifstrahlen gebildeten) Strahlenfläche mit der Fläche $\mathfrak{A}$ die auf ihr gesuchte Schlagschattengrenze ist.

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass wir die Aufgabe eine Schlagschattengrenze zu suchen, bereits lösen können; denn sie geht darauf hinaus den Schnitt zweier Flächen zu construiren — eine Aufgabe, die in § 20 abgehandelt ist.

469. Wollen wir nun den Schlagschatten eines Körpers auf der Oberfläche des Körpers selbst haben, so müssen wir

zunächst alle Streifschattengrenzen (Schattenlinien und Schattenkanten) mit Hilfe der oben angegebenen Mittel konstruieren, und dann von jeder solchen Schattengrenze den Schlagschatten auf dem Körper suchen. Zu dem Ende legen wir durch alle Punkte einer solchen Streifschattengrenze Stralen, wodurch wir eine streifende Stralenfläche erhalten, (welche für den Fall, dass die Schattengrenze eine Schattenlinie ist, eine berührende Stralenfläche wird). Diese Stralenfläche ist eine Ebene, wenn die Streifschattengrenze eine Gerade ist. In diesem Falle sucht man (nach § 20) den Schnitt der Stralenebene mit der Oberfläche des Körpers (wobei man natürlich auch, da die Gerade begrenzt ist, die Schnitte der durch ihre Endpunkte gehenden Stralen mit der Oberfläche zu suchen hat) und erhält die verlangte Schlagschattengrenze. Ist aber die Streifschattengrenze eine Curve, so ist die Stralenfläche in der Regel ein Cylinder, und hat man daher den Schnitt dieses Cylinders mit der Körperoberfläche (wieder nach § 20) aufzusuchen. Hierbei wird man in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, wie man sich später überzeugen wird, sehr häufig von vornherein durch Anschauung entscheiden können, ob die fragliche Streifschattengrenze einen Schlagschatten auf den Körper wirft oder nicht.

470. Hat man nach den bis jetzt gegebenen Anleitungen für einen Körper alle Schattengrenzen (Streif- und Schlagschattengrenzen) konstruirt und zugleich ausgemittelt, auf welcher Seite einer jeden Schattengrenze Licht und auf welcher Schatten ist, so wird man dadurch, dass man alle beschatteten Stellen schraffirt oder mit einer schwachen Tuschlage bedeckt, den Gesamtschatten auf dem Körper erhalten. Hiedurch erfährt man aber auch zugleich, welche von den gefundenen Schattengrenzen reel, und welche virtuel sind. Denn da jede Schattengrenze die Grenze des Schattens und Lichtes ist, so wird jede Linie, so weit sie im Schatten liegt, d. h. so weit auf beiden Seiten derselben Schatten ist, keine wirkliche (reele) Schattengrenze sein und also entfernt werden müssen. Man sieht also:

Hat man von einem Körper den Gesamtschatten konstruirt, so ist nur der Umfang der Schattenfigur

die Schattengrenze. Ebenso ist in jedem Risse des Körpers nun der Umfang des Risses des Schattens als Schattengrenze des Risses anzusehen.

471. Aus dem bisher über Schattenkonstruktion Gesagten geht hervor, dass wir, um den ganzen Schatten eines durch Zeichnung dargestellten Körpers (von dem also alle Kanten und alle Umrisse gezeichnet sind) zu erhalten, in folgender Ordnung vorzugehen haben:

- 1) Man sucht für jede Begrenzungsfläche des Körpers die Schattenlinie, indem man, wenn sie entwickelbar ist, die Berührungserzeugenden von mit dem Lichtstral parallelen Tangentialebenen, wenn sie nicht entwickelbar ist, die Berührungslinie eines die Fläche berührenden Stralencylinders (nach § 23) aufsucht;
- 2) man sucht für jede Kante des Körpers wie weit sie Schattenkante ist;
- 3) man legt durch jede Streifschattengrenze eine Stralenfläche, und sucht deren Schnitt mit der Oberfläche des Körpers;
- 4) man sucht, auf welcher Seite der gefundenen Schattengrenze Licht und auf welcher Seite Schatten ist.

Anm. Bei der Ausführung dieser Operationen werden wir alle diejenigen Schattengrenzen gar nicht aufsuchen, von denen wir durch Anschauung von vorn herein sehen, dass sie virtuell sind, oder gar nicht gefunden werden können. So werden wir alle Schattenlinien, die an konkaven (s. 463) Stellen des Körpers liegen, weglassen. Ebenso werden wir bei der Aufsuchung des Schlagschattens, den der Körper auf sich selbst wirft, durch Anschauung zu ermitteln suchen, welche Streifschattengrenzen auf den Körper Schlagschatten werfen, und welche nicht; von den letzteren suchen wir dann den Schlagschatten gar nicht auf.

472. Um das bisher Gesagte verständlicher zu machen Fig. 183. wollen wir ein Beispiel ausführen.

Aufg. Eine runde Säule mit runder Deckplatte ist gegeben (in möglichst einfacher Stellung gegen die Tafeln); man soll die Schatten auf diesem Körper konstruieren.

Aufl. Die runde Säule ist (ebenso, wie die Deckplatte) ein Kreiscylinder, von zwei zu seiner Axe senkrechten Ebenen abgeschnitten; beide (Säule und Deckplatte) haben daher zwei

Kreislinien als Kanten, und wenn wir voraussetzen, dass unsere beiden Cylinder eine gemeinschaftliche Axe haben, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so sind die ersten Risse unserer beiden Cylinder zwei konzentrische Kreise A_1 , C_1 , und ist A_1 zugleich der erste Riss der beiden Grenzkreise (A, B) der Säule (die zweiten Risse dieser Kreise sind in unserer Zeichnung mit A_2 , B_2 bezeichnet), so wie C_1 der erste Riss der beiden Kreise (C, D) der Deckelplatte ist. Im zweiten Riss (aus welchem man sich vorläufig die Linien a_2 b_2 , c_2 d_2 , h_2 k_2 , sowie die Schraffirungen hinweg denken wolle) sind, ausser den zweiten Rissen der Kreise A, B, C, D, noch die Umrisse der beiden Cylinder gezeichnet.

Zur Ausführung der Schattenkonstruktion haben wir nun zunächst die Schattenlinien zu zeichnen. Diese sind aber (wenn wir dem Lichtstral die in Nr. 460 angegebene Richtung S geben, und die Schattenlinie nach den oben (464) angegebenen Regeln aufsuchen) die Geraden, deren zweite Risse a_2 b_2 und c_2 d_2 sind (die anderen beiden Geraden sind in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar und daher weggelassen). Stellen wir uns hier unseren Körper auf der $\mathfrak{T}_1$ stehend vor, und denken wir uns zugleich den Lichtstral im Raume so gerichtet wie oben (460) angegeben, so werden wir sofort durch Anschauung erkennen, dass rechts von den Schattenlinien Schatten ist (deshalb haben wir rechts von a_2 b_2 und c_2 d_2 schraffirt).

Suchen wir nun die Schattenkanten, so sehen wir, dass alle unsere Kanten (A, B, C, D), weil sie von den Schattenlinien geschnitten werden (s. 465) theilweise Schattenkanten sind, und dass die Grenzpunkte diejenigen sind, deren erste Risse mit den ersten Rissen (a_1 , c_1 , e_1 , f_1) der Schattenlinien zusammenfallen. Welcher Theil einer der Kanten aber Schattenkante ist, lässt sich hier sehr leicht durch Anschauung ermitteln, wie dies für die Kante A hier gezeigt werden soll. Man wird nemlich leicht erkennen, dass der (in der $\mathfrak{T}_1$ liegende) Bogen a g e an der Grenze des Schattens und Lichtes liegt, also Schattenkante ist; denn die Linie A ist ja der Schnitt des Cylinders A_1 und der Ebene A_2 , und letztere ist (wie aus der Anschauung hervorgeht) im Schatten, während der Theil $a_1 g_1 e_1$ des Cylinders A_1 beleuchtet ist. In derselben Art wird man die andern Schattenkanten finden.

Will man nun den Schlagschatten aufsuchen, den unser Körper auf sich selbst wirft, so wird man durch Anschauung erkennen, dass nur die Kreislinie C einen Schatten auf unseren Körper wirft, während die von den anderen Streifschattengrenzen ausgehenden Lichtstralen die Oberfläche unseres Körpers nicht treffen. Namentlich wird man sehen, dass für die Kreislinie B der Körper konkav ist, und daher die Schattenkante auf B virtuel ist (s. 471).

Soll nun der von C auf unseren Körper geworfene Schlag Schatten konstruiert werden, so müssen wir uns (nach 469) durch C einen Stralencylinder gelegt denken und dessen Schnitt mit dem Cylinder A_1 suchen. Wie das im Allgemeinen geschieht und wie man also den Schlagschatten $h_2 k_2$ findet, ist aus Früherem (§ 20) bekannt; durch Anschauung werden wir erkennen, dass auf der oberen Seite von $h_2 k_2$ Schatten ist. Da sich nun aber herausstellt, dass $k_2 b_2$ im Schatten liegt, so ist dieses Stück Schattenlinie virtuel und muss daher weggelassen werden.

Anm. Hieraus geht hervor, dass man gut thut von der Curve, welche als Schlagschattengrenze erscheint, den Punkt k , in welchem diese die Schattenlinie trifft, aufzusuchen. Ferner wird man, wie früher, den Punkt (h_2) auf dem zweiten Umriss sich verschaffen und endlich sucht man auch gerne den höchsten Punkt g , der hier durch den Stral S gefunden wird, welcher die Axe unserer Cylinder schneidet.

473. Soll man den Schlagschatten, den ein Körper auf die Fläche eines anderen, z. B. auf $\mathfrak{T}_1$ wirft, suchen, so bestimme man zuerst, wie in voriger Nummer, sämtliche Schattengrenzen auf dem Körper selbst, wodurch man zugleich alle reelen Streifschattengrenzen erhält. Nun ist aber der Schlag Schatten, den ein Körper auf eine Fläche wirft, begrenzt von dem Schlagschatten seiner reelen Streifschattengrenzen. Man dürfte also nur von jeder Streifschattengrenze den Schlagschatten auf die $\mathfrak{T}_1$ (nach Anleitung der Nr. 469) aufsuchen. Um aber die Sache erschöpfend zu behandeln ist noch nöthig zu bemerken, dass jede Streifschattengrenze, soweit ihr Schlag Schatten auf den Körper selbst fällt, in der Regel keine Schlagschattengrenze auf der $\mathfrak{T}_1$ liefert. Denn der

Schlagschatten dieser Linie auf die $\mathfrak{L}_1$ fällt offenbar, weil sie auf dem Körper liegt, in den Schlagschatten des Körpers auf $\mathfrak{L}_1$ und bildet nur dann eine Schattengrenze, wenn sie zugleich Streifschattengrenze des Körpers ist, was aber in der Regel nicht der Fall ist. Man sieht also:

Die Schlagschattengrenze eines Körpers auf die $\mathfrak{L}_1$ (oder auf eine andere Fläche) wird gebildet von allen Schlagschatten der reelen Streifschattengrenzen auf die $\mathfrak{L}_1$ (oder eine andere Fläche) so weit dieselben nicht schon ihren Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben.

474. Wie aus dem oben gesagten hervorgeht, fällt der Schlagschatten, den eine Streifschattengrenze, die schon Schlagschatten auf den Körper geworfen hat, auf die $\mathfrak{L}_1$ wirft, in der Regel in den Schlagschatten des Körpers, ebenso wie der Schlagschatten, den eine virtuelle Streifschattengrenze wirft. Würde man also von allen Streifschattengrenzen (reelen und virtuellen) des Körpers, auch so weit sie schon Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben, die Schlagschatten auf $\mathfrak{L}_1$ aufsuchen, und die ganze Schattenfigur auf $\mathfrak{L}_1$ schraffiren, so würde man doch ein richtiges Resultat erhalten, indem für alle virtuellen Schattengrenzen der Schlagschatten auf $\mathfrak{L}_1$ in die Schattenfigur fielen und weggelassen würden. Man sieht also, dass

- 1) das Streben nur reele Schattengrenzen, soweit sie noch keinen Schlagschatten auf den Körper selbst geworfen haben, zur Aufsuchung des Schlagschattens auf $\mathfrak{L}_1$ zu benützen, nur dazu dient, um unnöthige Zeichnungsoperationen zu vermeiden;
- 2) dass durch den Schlagschatten auf die $\mathfrak{L}_1$ ein Mittel geboten ist, alle reelen Streifschattengrenzen zu erhalten, und alle virtuellen, so wie alle Kanten, die nicht Schattenkanten sind, auszumitteln, und zwar dadurch, dass nur die Schlagschatten der reelen Streifschattengrenzen auf $\mathfrak{L}_1$ den Umfang der Schattenfigur bilden, während von allen anderen Linien des Körpers die Schlagschatten in die Schattenfigur fallen. Ein Beispiel hierüber gibt folgende Aufgabe.

475. Aufg. Es ist gegeben ein Polyeder, z. B. der Kör- Fig. 184.
per $abcd$; man soll seine Streifschattengrenzen, und seinen
Schlagschatten auf die $\mathfrak{T}_1$ suchen.

Aufl. Da unser Körper nur von Ebenen begrenzt ist und demnach keine Schattenlinien auf ihm vorkommen, also auch keine Körperkante von einer Schattenlinie getroffen wird, so gibt es auf den Kanten keine solchen Grenzpunkte, wie sie oben (465) genannt sind, sondern es ist jede Kante entweder ganz Schattenkante, oder sie ist es ganz und gar nicht. Um dies nun für irgend eine Kante zu ermitteln, müssten wir entweder die Anschauung zu Hilfe nehmen, was aber hier bei der allgemeinen Lage unseres Körpers gegen die Tafeln nicht wohl zum Ziele führt, oder für die einzelnen Kanten die oben (466) angegebenen Konstruktion ausführen. Da aber auch der Schlagschatten unseres Körpers auf die $\mathfrak{T}_1$ verlangt ist, so wollen wir mit dessen Aufsuchung beginnen, indem wir die Schlagschatten aller Körperkanten auf die $\mathfrak{T}_1$ und demnach die Schlagschatten aller Ecken, (a, b, c, d) aufsuchen, und dem Körper entsprechend verbinden. Wir erhalten dann die ganze Schlagschattenfigur und finden daraus diejenigen Kanten, deren Schlagschatten den Umfang der Schattenfigur bilden, und welche demnach die reellen Streifschattengrenzen vorstellen. Führen wir die oben genannte Operation aus, so müssen wir durch a (Fig. 184) einen Stral legen und den Schnitt (a') dieses Strals mit der $\mathfrak{T}_1$ aufsuchen, wodurch wir den Schlagschatten (a') , den der Punkt a auf die $\mathfrak{T}_1$ wirft erhalten. In ähnlicher Art suchen wir b', c' und d' . Verbinden wir diese Schlagschattenpunkte (a', b', c', d') gerade so wie die Punkte (a, b, c, d) des Körpers selbst, so sehen wir, dass die ganze Schlagschattenfigur auf $\mathfrak{T}_1$ das Viereck $a' b' d' c' a'$ ist, und dass demnach die Kanten ab, bd, dc, ca , deren Schlagschatten die Schlagschattenfigur begrenzen, (während die Schlagschatten von ad und bc in diese Figur fallen) die Streifschattengrenzen sind. Durch Anschauung kann man noch erkennen, dass zu einem beliebigen Punkt von ad der Lichtstral ungehindert gelangen kann, dass also die Flächen adc und adb beleuchtet, und demnach bdc und abc beschattet sind. Ist man aber in Bezug auf die Anschauung nicht sicher, so verfähre man, um sich Gewissheit über

die Beleuchtung des Körpers zu verschaffen, nach Nr. 467. Zu dem Ende nehmen wir auf dem Körper, etwa auf einer der Kanten, die nicht Schattengrenzen sind, z. B. auf bc , einen Punkt e an, legen dadurch einen Stral A und durch diesen eine Lothebene, z. B. die Ebene A_1 , suchen den Schnitt efg dieser Ebene mit dem Körper, so sieht man (in der $\mathfrak{T}_2$) dass der Stral nach e nicht gelangen kann, da er schon vorher, in der Geraden fg , den Körper trifft. Es sind also die Flächen bcd und bca beschattet und demnach, da $abdca$ Schattengrenze ist, die Flächen adc und adb beleuchtet. *)

476. Der Schüler wird gut thun zur Uebung noch ein Beispiel über Aufsuchung von Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_1$ zu machen. Wir empfehlen ihm dazu den oben (472, Fig. 183) besprochenen Körper zu benützen und die $\mathfrak{T}_1$ durch den Kreis A zu legen. Hat er hier die Schattenlinien gezeichnet, so suche er die Schlagschatten dieser Linien, und die der Kanten auf die $\mathfrak{T}_1$. Hiebei wollen wir zu seiner Anleitung Folgendes bemerken.

- 1) Der Schlagschatten einer begrenzten Geraden ab auf die $\mathfrak{T}_1$ ist eine begrenzte Gerade $a'b'$. Sucht man also die Schlagschatten a' , b' ihrer Endpunkte a , b so ist $a'b'$ der Schlagschatten von ab .
- 2) Hat man den Schlagschatten einer mit der $\mathfrak{T}_1$ parallelen Kreislinie A auf die $\mathfrak{T}_1$ zu suchen, und legt man zu dem Ende durch A einen Stralencylinder, so ist dessen Schnitt A' mit $\mathfrak{T}_1$ der Schlagschatten von A . Offenbar ist aber A' ein mit A kongruenter Kreis, von dem man also blos den Mittelpunkt zu suchen hat. Diesen Mittelpunkt aber findet man, wenn man durch das Centrum von A einen Stral legt, und zusieht, wo dieser die $\mathfrak{T}_1$ schneidet. Sucht man nun in Fig. 183 die Schlagschatten der vier Kreise (A, B, C, D) und die der vier Schattenlinien (von denen in jener Figur nur $a_2 b_2$ und $c_2 d_2$ gezeichnet sind, aber nicht die beiden unsichtbaren, die in e_1 und f_1 ihre ersten Risse haben,

*) So wie früher schon, müssen wir auch hier den Schüler in seinem Interesse daran mahnen, dass er stets die Zeichnungen (nach Anleitung des Textes und mit Zuhilfenahme unserer Zeichnungen) selber konstruirt.

und deren Schlagschatten auch konstruirt werden müssen), so erhält man die ganze Schattenfigur, und kann sich überzeugen, dass der Schlagschatten von B in diese Figur fällt, also nicht gezeichnet zu werden braucht; dass ebenso der Schlagschatten von jedem der übrigen Kreise die Hälfte (und von dem des Kreises C das Stück das dem Theile von C entspricht, der auf den Körper selbst schon Schlagschatten geworfen hat) in die Schattenfigur fällt, wie wir dies nach den oben (472) gemachten Auseinandersetzungen bereits wissen. Man überzeugt sich aber dadurch, dass man mit Hilfe des Schlagschattens auf $\mathfrak{T}_1$ erfahren kann, welche Schattengrenzen reel sind.

§ 32.

Schattenstriche.

477. In manchen Zeichnungen werden zu ihrer Verdeutlichung gewisse Striche kräftiger ausgezogen, als die übrigen und nennt man dann die stärkeren Striche Schattenstriche. Wie diese Schattenstriche zu verstehen sind ist nicht allgemein klar ausgesprochen, und wollen wir daher hier festsetzen, wie wir dieselben auffassen.

Wir erklären nemlich, dass für den Fall der Körper nicht schattirt werden soll, wir aber zur Verdeutlichung der Zeichnungen Schattenstriche anbringen wollen, die ersten oder zweiten Risse aller Kanten, so weit sie (ohne Rücksicht auf Schlagschatten, die der Körper auf sich selbst wirft) reele Schattenkanten und in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) sichtbar sind, kräftiger gezogen werden, als die übrigen Linien. Also blos Kanten, und nur so weit sie Schattenkanten sind werden mit kräftigeren Strichen, Schattenstrichen, gezeichnet, alle übrigen Linien, also auch die Umrisse, werden schwächer ausgezogen. Halten wir hieran fest, so geben sich in jedem einzelnen Falle die Schattenstriche mit aller Bestimmtheit, und wird dann, wie wir sehen werden, durch die Schattenstriche die Zeichnung deutlicher.

478. Suchen wir auf unsere Erklärung hin zunächst die Schattenstriche für ein Parallelopiped, dessen Seiten mit der $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ (diese auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ senkrecht vorausgesetzt) beziehungsweise parallel sind. Nehmen wir den Lichtstrahl A in

Fig. 185.

der üblichen Richtung (s. 460) an, so sieht man durch Anschauung, dass nur die vordere, obere und linke Seite des Körpers beleuchtet und seine Schattenkanten daher (Fig. 185, in welcher wir im ersten und zweiten Riss an jeden Eckpunkt zwei Buchstaben geschrieben haben, weil jeder der Riss von zwei Punkten ist) die Kanten ab , bf , fg , gh , hd , da sind. Da aber im ersten Risse nur die in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Linien, also die Risse von ef , fg , gh und he gezeichnet sind, so werden im ersten Risse fg und gh Schattenstriche; in ähnlicher Art im zweiten Risse ab und bf . Nehmen wir aber die $\mathfrak{T}_3$ (senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) an und zwar rechts vom Körper so, dass sie die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{R}'_1$ schneidet und klappen wir $\mathfrak{T}_3$ so um, dass $\mathfrak{R}'_3$ auf $\mathfrak{R}_2$ fällt, und $a_3d_3h_3e_3$ der dritte Riss des Körpers wird, so sind hier die Kanten der linken Seite ($adhe$) sichtbar, also ad und dh Schattenstriche. Nimmt man aber eine neue Tafel ($\mathfrak{T}_4$) so an, dass sie wieder senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ist, aber links vom Körper liegt, so dass sie die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{R}''_1$ schneidet, und klappt man diese $\mathfrak{T}_4$ so um, dass $\mathfrak{R}''_4$ auf $\mathfrak{R}_2$ fällt, so ist, da in Bezug auf $\mathfrak{T}_4$ die rechte Seitenfläche ($bcgf$) sichtbar ist, $b_4c_4g_4f_4$ der vierte Riss des Körpers und demnach hier bf und fg Schattenstriche. In der durch Fig. 185 angegebenen Art müssen für die verschiedenen Risse die Schattenstriche ausgeführt werden, wenn sie richtig angebracht sein sollen.

479. Macht man die Schattenstriche wie eben angegeben, so hat man dadurch ein Mittel die verschiedenen in der Anwendung so oft gebrauchten Risse, die wir in voriger Nummer angewendet haben, zu unterscheiden. Denn man sieht ja, dass die Schattenstriche an den Rissen eines wie oben aufgestellten Parallelopipeds in $\mathfrak{T}_1$ rechts und hinten, in $\mathfrak{T}_2$ rechts und unten, in der $\mathfrak{T}_3$ (Seitentafel zur Rechten) links und unten, in der $\mathfrak{T}_4$ (Seitentafel zur Linken) links und oben erscheinen. Und da in practischen Fällen an fast jedem Körper Parallelopipede in der obigen Aufstellung vorkommen, oder als Unterlage beigelegt werden können, so würde man durch die Schattenstriche des Parallelopipeds wenigstens erreichen, die obengenannten verschiedenen Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$) ohne beigegebenen Text zu unterscheiden. Denn nicht immer kann man die viererlei Risse

so wie die Fig. 185 anordnen (dass $\mathfrak{R}_1$ unten $\mathfrak{R}_2$, oben, $\mathfrak{R}_3$ rechts und $\mathfrak{R}_4$ links liegt), dass man schon an der Anordnung den entsprechenden Riss erkennt, sondern es muss oft, wegen Mangels an Raum die obige, sonst sehr empfehlenswerthe Anordnung verlassen werden.

Anm. Des Vergleiches wegen haben wir in Fig. 185 auch den dritten (A_3) und vierten (A_4) Riss des Lichtstrals angegeben. Wie man aber A_3 und A_4 aus A_1 und A_2 findet, ist bekannt.

480. Die Aufklärungen, welche wir durch die Schatten- Fig. 186. striche erhalten, wollen wir in Folgendem an einigen Beispielen darthun.

Es seien (Fig. 186 a) zwei aufeinanderstehende Parallelopiped gegeben, das obere kleiner als das untere, (so dass der ganze hier dargestellte Körper gleich ist dem grossen Parallelopiped plus dem kleinen), während daneben (Fig. 186 b) ein hohles Parallelopiped vorstellt, so dass hier der Körper gleich ist dem grossen Parallelopiped minus dem kleinem. Man sieht nun leicht, dass die ersten Risse beider Körper ganz gleich gestaltet sind. Macht man aber die Schattenstriche, so kann man in den ersten Rissen beider Figuren (a und b) den Unterschied der ihnen entsprechenden Körper erkennen.

481. Hat man einen auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Drehcylinder, Fig. 187. der von zwei zu seiner Axe senkrechten Ebenen A_2 , B_2 , die ihn nach den Kreisen A, B (Fig. 187 a) schneiden, abgegrenzt wird, so wird man finden, dass die Kreislinie A (welche in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbar ist) theilweise Schattenkante ist, dass die Grenzpunkte auf ihr die Punkte b und c sind, (die ersten Risse dieser Punkte liegen in einer Geraden $b_1 c_1$ die unter 45° zur $\mathfrak{R}$ geneigt ist; der zweite Riss von c ist in der Zeichnung weglassen, da c in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar ist) und dass der Theil von A dessen erster Riss als Schattenstrich behandelt ist, die Schattenkante auf A vorstellt. Man wird also den ersten Riss eines so gestellten Cylinders, wenn man ihn mit Schattenstrichen behandeln will, so ausziehen, wie in unserer Figur geschehen, und ist nur zu bemerken, dass man mit dem stärkeren Striche nicht an den Punkten b_1 , c, plötzlich aufhört, was unschön aussehen würde, sondern, dass man über b_1 und c_1 ein

Stückchen weit hinaus den starken Strich in den schwachen allmählig verlaufen lässt.

Was den (rechteckigen) zweiten Riss unseres Körpers anlangt, so sind die beiden vertikalen Seiten des Rechteks Umrisse des Cylinders, also keine Kanten, und werden dieselben daher schwach ausgezogen. Die beiden horizontalen Seiten des Rechtecks aber sind die Risse der Kanten (A und B) und wäre offenbar genau genommen A_2 , zwischen b_2 und dem rechten Umriss stark auszuziehen. Man pflegt aber, da bei weitem der grösste Theil von A_2 schwach gezeichnet werden muss, das ganze A_2 schwach, und ähnlich so, das ganze B_2 (obgleich ein geringer Theil desselben schwach gezogen werden sollte) stark auszuziehen. Man kann dies auch gelten lassen; denn trotz dieser kleinen Unrichtigkeit, unterscheiden sich doch der zweite Riss dieser runden Säule von dem einer viereckigen Säule (Fig. 187 b). Ohne Schattenstriche wären die zweiten Risse (der Figuren 187 a und b) gleich; mit Schattenstrichen ist die rechte Vertikallinie des zweiten Risses in der Fig. a schwach in Fig. b stark ausgezogen.

Anm. Man sieht demnach, dass die oben aufgestellte Regel, wonach Umrisse nie mit Schattenstrichen gezeichnet werden, gut ist und dazu dient die Zeichnungen verschiedener Körper zu unterscheiden, die ohne Schattenstriche einander gleich gewesen wären.

Fig. 188. 482. Hat man einen Drehungskegel, dessen Axe auf der $\mathfrak{L}_1$ senkrecht steht, und der von einer auf dieser Axe senkrechten Ebene A_2 (Fig. 188), die ihn natürlich nach einem Kreise A schneidet, abgegrenzt wird, so findet man nach den früheren Regeln seine Schattenlinien ba, ca, wenn man parallel zum Lichtstral durch die Spitze a eine Gerade B legt, deren Schnitt mit der Ebene A_2 sucht und von ihm aus Tangenten an A legt, die diese Kreislinie nach den Punkten b, c berühren. b und c sind also auf der Kante A des Kegels die Grenzpunkte für die Schattenkante, welche, wie uns die Anschauung sagt, so liegt, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist. In dem Dreiecke, das den zweiten Riss unseres Kegels vorstellt, ist die Horizontalinie (als zweiter Riss der Schattenkante) stark zu zeich-

nen, während die anderen beiden Seiten, als Umrisse, schwach gezeichnet werden müssen.

Anm. Zeichnet man die Schattenstriche an dem Kegel so, wie wir es in unserer Figur gethan, und wie es aus unserer früher aufgestellten Regel hervorgeht, so unterscheidet sich der erste Riss des Kegels von dem eines Cylinders (Eig. 187 a) wesentlich dadurch, dass bei diesem rechts von b_1 und c_1 , bei jenem links von b_1 und c_1 , der Schattenstrich erscheint. Ausserdem geht für den Cylinder die Gerade b_1c_1 durch a_1 bei dem Kegel nicht, sondern es ist b_1c_1 um so weiter von a_1 entfernt, je niedriger der Kegel ist (unter einer gewissen Höhe wird das ganze A zu Schattenkante). Kommt es, wie gewöhnlich, nicht darauf an, b_1 und c_1 genau anzugeben, so kann man diese Punkte ohne genaue Untersuchung durch eine beiläufige Konstruktion aus freier Hand bestimmen, oder man erlaubt sich das ganze A_1 als Schattenstrich darzustellen; der Zweck, diesen Riss von dem eines Cylinders zu unterscheiden, ist auch damit erreicht.

483. Hat man eine Kugel oder eine geschlossene Drehfläche, z. B. ein Ellipsoid, deren Axe auf $\mathfrak{L}_1$ senkrecht steht, so ist der erste Riss der Fläche ein Kreis, der den ersten Umriss derselben vorstellt, und deshalb durchaus schwach gezogen wird. Demnach unterscheiden sich, nach unseren Regeln für Zeichnung von Schattenstrichen, die ersten Risse eines Cylinders, Kegels und einer Kugel (oder geschlossener Drehfläche mit vertikaler Axe) wesentlich von einander.

§ 33.

Höchstes Licht und Isophoten.

484. Wenn ein Stral auf eine spiegelnde (polirte) Fläche auffällt, so wird er nach einem bestimmten Gesetze zurückgeworfen. Ist aber die Oberfläche regelmässig matt geschliffen (und so wollen wir die Flächen, welche wir schattiren, voraussetzen), so werden die Lichtstralen zerstreut zurückgeworfen, d. h. es werden von jedem beleuchteten Punkte nach allen Seiten (zurückgeworfene) Stralen ausgesendet, die bei einer gewissen Regelmässigkeit des Schiffes, die wir voraussetzen wollen, gleichstark sind. Durch diese so zurückgeworfenen Stra-

len verhält sich der Körper wie ein leuchtender, und wird er dadurch an den beleuchteten Stellen unserem Auge sichtbar. Aber die Stärke der von den verschiedenen Punkten des Körpers ausgesendeten Stralen ist verschieden, und hängt, nach physikalischen Gesetzen ab theils von der Lichtstärke des leuchtenden Punktes, theils von der Entfernung dieses Punktes vom beleuchteten Punkte, theils von dem Winkel den der Lichtstral an der beleuchteten Stelle mit der Tangentialebene der Fläche an dieser Stelle bildet. Nehmen wir nur an, wie dies für unsere Schattenkonstruktionen der Fall ist, dass alle Punkte von derselben Lichtquelle beleuchtet werden, und dass der leuchtende Punkt in unendlicher Ferne sich befindet, demnach seine Entfernungen von allen beleuchteten Punkten als gleich betrachtet werden können, so ist die Stärke der Beleuchtung an einer bestimmten Stelle nur noch abhängig von dem Winkel (α) des Lichtstrals mit der Tangentialebene an dieser Stelle, und zwar ist die Beleuchtungsstärke proportional dem sinus dieses Winkels, also gleich $\sin \alpha$, wenn wir die Beleuchtungsstärke für den Winkel von 90° mit 1 bezeichnen. Unter unseren Verhältnissen bilden aber alle Stralen (weil parallel) mit einer Ebene gleiche Winkel, und ist demnach eine ebene Figur an allen Stellen gleich stark beleuchtet. Wir haben demnach für unsere Schattenkonstruktion folgende Sätze:

1) Die Beleuchtungsstärke $\mathfrak{B}$ an einem beleuchteten Punkte ist $\mathfrak{B} = \sin \alpha$, wenn α den Winkel des Lichtstrals mit der Tangentialebene der beleuchteten Fläche in dem Punkte bedeutet;

2) eine ebene Figur ist an allen Punkten gleich stark beleuchtet.

Anm. Nehmen wir an, die Oberfläche des Körpers sei so weiss, wie unser Papier, so wird uns dieses weiss um so heller erscheinen, je mehr sich α dem rechten Winkel nähert. Jedem Winkel α wird also eine bestimmte Helligkeit der Farbe, oder, wie der hiefür gebräuchliche Ausdruck heisst, ein bestimmter Ton entsprechen. Diese Töne können wir erhalten, wenn wir an den Stellen für welche $\sin \alpha = 1$ ist, das Papier weiss lassen, während wir an den Stellen, wo $\sin \alpha < 1$ ist, die Fläche mit einer Tuschlage (oder feiner Bleistiftschraffirung) überziehen, die

um so schwächer gehalten wird, je grösser die Lichtstärke an der Stelle ist. Wir können uns also auf diese Art eine ganze Stufenreihe von Tönen, von weiss bis schwarz verschaffen, von welcher jeder Ton einer bestimmten Beleuchtungsstärke, einem bestimmten $\sin \alpha$, entspricht. Ist der Körper farbig, so bilden wir unsere Töne ebenso, nur überziehen wir sie noch mit einer durchsichtigen Farbe, die mit der unseres Körpers übereinstimmt. Wir wollen aber in Folgendem vorläufig voraussetzen, dass unsere zu schattirenden Körper weiss sind.

485. Die Stelle einer Oberfläche, an welcher der hellste Ton auf ihr vorkommt, nennt man ihr höchstes Licht. Ferner nennt man jede auf einer Fläche liegende Linie, deren Punkte alle gleichen Ton (gleiche Beleuchtungsstärke) haben, eine Isophote.

486. Haben wir eine beleuchtete ebene Figur $\mathfrak{A}$, die also an allen Punkten gleichen Ton hat, und denken wir unser Auge senkrecht vor der $\mathfrak{I}_2$ in unendlicher Ferne, so wirft jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ einen Strahl (der $\perp \mathfrak{I}_2$ ist) in's Auge und bilden alle diese Strahlen zusammen einen Strahlenbündel von prismatischer oder cylindrischer Oberfläche der die $\mathfrak{I}_2$ nach einer Figur schneidet, welche den zweiten Riss von $\mathfrak{A}$ vorstellt. Der zweite Riss von $\mathfrak{A}$ macht also seiner Gestalt nach auf das Auge denselben Eindruck, wie $\mathfrak{A}$ selbst (weshalb man ja einen Riss auch Ansicht nennt). Soll aber auch bezüglich der Beleuchtung der Riss von $\mathfrak{A}$ denselben Eindruck machen, wie $\mathfrak{A}$ selbst, so muss man bedenken, dass, wenn wir dem Riss denselben Ton geben, den $\mathfrak{A}$ selbst hat, die vom Risse ausgehenden Strahlen, dieselbe Stärke besitzen, wie die von $\mathfrak{A}$ ausgehenden, demnach der vom Risse ausgehende Strahlenbündel mit dem von $\mathfrak{A}$ ausgehenden vollkommen identisch ist. Da wir nun wollen, dass auch in Bezug auf Beleuchtung der Riss einer Fläche denselben Eindruck auf das Auge machen soll, wie die Fläche selbst, so folgt:

- 1) Der Ton des Risses einer ebenen Figur (oder einer sehr kleinen, als eben zu betrachtenden Figur auf einer krummen Fläche) ist gleich dem Tone der Figur selbst;
- 2) der Riss des höchsten Lichtes einer Fläche ist das höchste Licht des Risses der Fläche;

3) die Risse der Isophoten einer Fläche sind Isophoten des Risses der Fläche.

Um also das höchste Licht oder eine Isophote des ersten (oder zweiten) Risses einer Fläche zu finden, darf man nur das höchste Licht oder resp. eine Isophote der Fläche selbst suchen und davon den ersten (oder zweiten) Riss zeichnen. Wir haben also nur zu untersuchen, wie man das höchste Licht und die Isophote einer Fläche findet.

487. Wie wir schon wissen, ist die Isophote einer Fläche eine solche Linie derselben, die an allen Punkten gleich stark beleuchtet ist, für die also an allen Punkten die Lichtstrahlen gleiche Winkel mit den Tangentialebenen an den betreffenden Punkten bilden. Da nun jede entwickelbare Fläche von einer Tangentialebene nach einer Geraden berührt wird, und daher alle durch Punkte dieser Geraden gehenden Lichtstrahlen, weil diese parallel sind, gleiche Winkel mit der Tangentialebene bilden, so ist jede solche Gerade eine Isophote, und diejenige Gerade, welche am stärksten beleuchtet ist, das höchste Licht der Fläche. Wir haben also die Sätze:

1) Die geraden Erzeugenden einer entwickelbaren Fläche sind Isophoten derselben;

2) das höchste Licht einer entwickelbaren Fläche ist eine gerade Erzeugende derselben.

Fig. 189. 488. Wollen wir nun untersuchen, wie man das höchste Licht auf einer entwickelbaren Fläche findet, so müssen wir diejenige Erzeugende suchen, welche mit der ihr entsprechenden Tangentialebene einen möglichst grossen spitzen Winkel α bildet (damit $\sin \alpha$ möglichst gross werde) und die Fläche auf der beleuchteten Seite berührt. Machen wir zunächst unsere Untersuchung für einen Kegel.

Es sei also ein beliebiger Kegel gegeben, und sollen wir untersuchen, welche Tangentialebene desselben mit einem beliebigen Lichtstral, am bequemsten mit dem durch seine Spitze gehenden, einen möglichst grossen spitzen Winkel einschliesst. Wir nehmen zu dem Ende ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$) so an, dass eine dieser Tafeln, z. B. $\mathfrak{T}_3$, auf dem Lichtstral senkrecht steht. Ist nun (Figur 189) A die Spur des Kegels auf der $\mathfrak{T}_3$ und a seine Spitze, also a_3 der dritte Riss des durch die

Spitze gelegten Lichtstrals, so sind die aus a_3 an A_3 gezogenen Tangenten die dritten Risse der Schattengrenzen und ist der Kegel rechts oder links von diesen Schattengrenzen beleuchtet, je nachdem der Lichtstral (welcher $\perp \mathfrak{T}_3$ ist) von oben herab, oder von unten hinauf gerichtet ist. Nehmen wir an, der Kegel sei links beleuchtet und zeichnen wir eine beliebige Tangentialebene des Kegels, z. B. die Ebene Ba , welche den Kegel auf der beleuchteten Seite berührt, so finden wir bekanntlich den Winkel α dieser Ebene mit dem Lichtstral durch ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete $\overline{a_3 b_3}$ (die Entfernung von a_3 nach B_3), und dessen andere Kathete $\overline{a_4 a'_4}$ (die Entfernung des Punktes a von der $\mathfrak{T}_3$) ist, und zwar wird der Winkel α von der Kathete $\overline{a_4 a'_4}$ mit der Hypotenuse jenes Dreiecks gebildet. Der Winkel α wird daher am Grössten, wenn die Spur der Tangentialebene die Spur A in dem Punkte c berührt, den man erhält, wenn man aus dem Punkte a_3 , als Mittelpunkt einen Kreis C (dessen vierter Riss in $\mathfrak{R}'_4$ liegt, während er selbst mit seinem dritten Riss (C_3) zusammenfällt) zeichnet, der A berührt und zwar in einem Punkte der natürlich auf der beleuchteten Seite des Kegels liegt. Dann ist die Gerade ac die Erzeugende, welche das höchste Licht vorstellt. Nach dieser Geraden ca berührt aber der Drehungskegel Ca den gegebenen Kegel Aa , folglich ist die in $c_3 a_3$ zur $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Ebene die die Gerade ac enthaltende gemeinschaftliche Normalebene für beide Kegel. Da noch diese Ebene einen Lichtstral enthält, demnach zu allen Lichtstralen parallel ist, so hat man den Satz:

Das höchste Licht eines Kegels ist diejenige auf dem beleuchteten Theil des Kegels liegende Gerade desselben, für welche die Normalebene parallel zum Lichtstral ist.

Da dieser Satz für jeden Kegel passt, so gilt er auch wenn dessen Spitze in unendlicher Ferne liegt, also auch für den Cylinder.

489. Hat man eine beliebige entwickelbare Fläche $\mathfrak{A}$ und sucht man ihren Leitkegel $\mathfrak{B}$, indem man durch einen beliebigen Punkt zu allen Geraden von $\mathfrak{A}$ Parallele legt, so sind die beiden Tangentialebenen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die an zwei einander entsprechenden (parallelen) Erzeugenden dieser Flächen berühren,

einander parallel; ebenso die beiden diesen Erzeugenden entsprechenden Normalebenen. Hat man also auf dem Kegel das höchste Licht, so ist die entsprechende Erzeugende auf $\mathfrak{A}$ höchstes Licht für $\mathfrak{A}$. Da aber die diesen höchsten Lichtern entsprechenden Normalebenen parallel sind, und die für den Kegel parallel zum Lichtstral ist, so ist es auch die für die Fläche $\mathfrak{A}$. Demnach gilt obiger Satz für alle entwickelbaren Flächen, und wir können sagen:

Das höchste Licht einer entwickelbaren Fläche ist diejenige auf dem beleuchteten Theil der Fläche liegende Erzeugende, für welche die Normalebene der Fläche parallel zum Lichtstral ist.

Anm. Gibt es mehrere solche Erzeugende, so ist die das höchste Licht, für welche α am grössten ist.

490. Soll das höchste Licht auf einem Cylinder gefunden werden, so muss eine durch dasselbe gelegte Normalebene des Cylinders parallel zum Lichtstral, aber auch parallel zum Cylinder sein. Legt man daher durch einen beliebigen Punkt eine Parallele A zum Lichtstral und eine Parallele B zum Cylinder, so ist die Ebene AB parallel zur genannten Normalebene, und demnach senkrecht zur Ebene, die den Cylinder im höchsten Lichte berührt. Nimmt man also eine Gerade C senkrecht zur Ebene AB an und legt an den Cylinder eine Tangentialebene $\parallel C$, welche ihn auf dem beleuchteten Theil nach der Geraden D berührt, so ist D das höchste Licht.

Der Schüler wird gut thun diese Aufgabe auszuführen.

Anm. Findet man hier mehrere Gerade D, so ist jede derselben ein höchstes Licht; denn da alle Tangentialebenen des Cylinders, die parallel zu C sind, unter sich parallel laufen, so bilden sie alle mit den Lichtstrahlen gleiche Winkel α , und wenn daher der $\sin \alpha$ für die eine Linie D möglichst gross ist, so ist er es auch für die andere.

491. Hat man von einem Drehungskegel $\mathfrak{A}$ das höchste Licht A zu finden, so ist die durch A gehende Normalebene des Kegels eine Meridianebene desselben, welche den durch seine Spitze gelegten Lichtstral enthalten muss. Legt man daher durch die Spitze von $\mathfrak{A}$ einen Lichtstral B und durch diesen und die Axe des Kegels eine Ebene, so schneidet diese Ebene

den Kegel nach zwei Geraden C, D, von denen diejenige, welche auf dem beleuchteten Theil von A liegt, oder wenn beide Gerade auf dem beleuchteten Kegel liegen, diejenige, welche mit dem Lichtstral einen grösseren Winkel bildet, als die andere, das höchste Licht ist.

Sollte der besondere Fall eintreten, dass C und D gleiche Winkel mit dem Lichtstral bilden, was nur möglich ist, wenn die Kegelaxe parallel zum Lichtstral ist, so würden offenbar alle Erzeugenden des Kegels gleichstark beleuchtet sein, da ja die Axe mit allen Erzeugenden gleiche Winkel bildet.

492. Will man das höchste Licht eines beliebigen (durch seinen ersten und zweiten Riss gegebenen) Kegels auffinden, so legt man nach der oben (488) gegebenen Anleitung durch die Kegelspitze einen Lichtstral A, nimmt eine zu diesem senkrechten Ebene an, die man als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet und umklappt, und sucht den dritten Riss (B_3) des Schnittes dieser Ebene mit dem Kegel, so wie den dritten Riss (a_3) des Schnittes der Ebene mit dem Lichtstral A. Zeichnet man nur aus a_3 den Kreis, der A_3 in einem auf der Lichtseite liegenden Punkt b_3 berührt, so ist b_3 der dritte Riss eines Punktes des höchsten Lichtes. Sucht man noch b_1 und b_2 (aus b_3) und verbindet b mit der Kegelspitze, so erhält man das höchste Licht.

493. Soll man für eine beliebige entwickelbare Fläche $\mathfrak{A}$ das höchste Licht finden, so legt man (nach 489) durch einen beliebigen Punkt zu allen Erzeugenden von $\mathfrak{A}$ Parallele, wodurch man den Leitkegel $\mathfrak{B}$ erhält (dieser ist für eine entwickelbare Schraubenfläche, so wie für eine jede Böschungsfläche ein Drehungskegel). Sucht man nun das höchste Licht (A) von $\mathfrak{B}$ und auf $\mathfrak{A}$ die Erzeugende B, welche $\parallel A$ ist, so ist B das gesuchte höchste Licht.

494. Für die meisten praktisch vorkommenden nicht entwickelbaren Flächen, gibt es Punkte, für welche $\sin \alpha$ den grösstmöglichen Werth erreicht, d. h. für welche $\sin \alpha = 1$ ist. Jeder solcher Punkt, der auf dem beleuchteten Theile der Fläche liegt, ist dann ein höchstes Licht, das wir absolutes höchstes Licht nennen wollen. Soll dieses daher gefunden werden, so sucht man denjenigen Punkt auf der Lichtseite der Fläche, in welchem der Lichtstral eine Normale der Fläche ist, oder,

was dasselbe sagt, in welchem die Tangentialebene der Fläche parallel ist zu einer auf dem Lichtstrale senkrechten Ebene. Nehmen wir daher eine zum Lichtstrale senkrechte Ebene an und legen (nach § 23. Nr. 397—404) parallel zu ihr Tangentialebenen an die Fläche, so sind diejenigen Berührungspunkte dieser Ebenen, welche auf dem beleuchteten Theile der Fläche liegen, die absoluten höchsten Lichter.

495. Wie wir schon wissen, nimmt die Beleuchtungsstärke des beleuchteten Theils einer Fläche vom höchsten Lichte gegen die Schattenlinie ab, und belegen wir daher die Lichtfläche mit Tönen, die um so stärker sind, je geringer die betreffende Lichtstärke ist. Für ein geübtes Auge genügt es meistens diese Töne vom höchsten Lichte bis zur Streifschattengrenze nach dem Gefühle zunehmen zu lassen. Will man aber genauer und sicherer zu Werke gehen, so benützt man zur Abschätzung dieser Töne die Isophoten (485). Wir wollen daher über die Aufsuchung von Isophoten das Wichtigste mittheilen, und gleich bemerken, dass wir nicht bloß Isophoten überhaupt aufsuchen lernen wollen, sondern Isophoten bestimmter Qualität, das soll heissen, Isophoten in deren Punkten die Lichtstärke, der $\sin \alpha$, einen gegebenen Werth hat. Was hiebei die entwickelbaren Flächen anlangt, so wissen wir schon, dass deren Isophoten Gerade sind, und ist also bloß noch zu zeigen, wie man solche Isophoten von bestimmter Qualität findet.

496. Aufg. Für einen Kegel $\mathfrak{A}$ eine Isophote zu finden für welche $\sin \alpha$, also auch α , gegeben ist.

Aufl. Soll die Isophote J , für welche der Winkel α eine gegebene Grösse hat, gefunden werden, so muss die Tangentialebene des Kegels in J (J geht jedenfalls durch die Kegelspitze a), mit dem Lichtstral den Winkel α bilden. Da aber alle durch α gehenden Ebenen, die mit dem Lichtstral den $\angle \alpha$ bilden, Tangentialebenen eines Drehungskegels $\mathfrak{B}$ sind, der a zur Spitze, den durch a gelegten Lichtstral als Axe und α als Oeffnungswinkel hat, so darf man nur eine Ebene suchen, welche $\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlich berührt, und deren Berührungslinie mit $\mathfrak{A}$ aufsuchen, und man erhält die verlangte Isophote.

Obgleich die Ausführung dieser Auflösung nichts enthält, was uns nicht von früher her bekannt wäre, so wollen wir doch

bemerken, dass wir um die Auflösung auszuführen, wie oben zur Aufsuchung des höchsten Lichtes eines Kegels, ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$) so annehmen, dass $\mathfrak{T}_3$ senkrecht zum Lichtstrahle steht, wodurch wir in gleicher Art, wie oben (488), auf die Fig. 189 geführt werden. Zeichnen wir nun aus dem Mittelpunkt a_3 einen Kreis D_3 , dessen Halbmesser $(a_3 b_3)$ gleich der Kathete $a'b$ eines rechtwinkligen $\triangle aba'$ ist, an welchem die andere Kathete $aa' = a_4 a'_4$ und der Winkel α von dieser Kathete und der Hypotenuse gebildet ist, so ist die Gerade B_3 , welche A_3 und D_3 gemeinschaftlich berührt (und zwar A_3 in d_3) die dritte Spur der gemeinschaftlichen Tangentialebene beider oben genannten Kegel. Demnach ist der Punkt d (dessen dritter Riss d_3 ist, während d_4 in $\mathfrak{R}'_4$ liegt) ein Punkt der gesuchten Isophote. Sucht man daher noch d_1 und d_2 (aus d_3 und d_4) nach bekannten Regeln, so ist Gerade ad die verlangte Isophote.

Anm. Es gibt so viele Isophoten von der verlangten Qualität, als die Curven A_3 und D_3 gemeinschaftliche Tangenten zulassen. Sollen blos diejenigen Isophoten gesucht werden, welche auf der Lichtseite des Kegels liegen, so muss man natürlich nachsehen, welche der gefundenen Isophoten diese Eigenschaft haben.

497. Wie man die Isophoten eines Drehungs-cylinders oder Drehungskegels findet, wird später bei den Drehflächen gezeigt werden.

498. Will man die Isophote einer allgemeinen entwickelbaren Fläche $\mathfrak{A}$ finden, so sucht man sie für deren Leitkegel $\mathfrak{B}$, und zeichnet die Gerade auf $\mathfrak{A}$, welche zu der Isophote auf $\mathfrak{B}$ parallel ist.

499. Soll die Isophote bestimmter Qualität, also bei gegebenen $\angle \alpha$, für einen beliebigen Cylinder gesucht werden, so ist sie die Berührungslinie einer Tangentialebene des Cylinders, die mit dem Lichtstral den $\angle \alpha$ bildet. Nimmt man daher einen beliebigen Punkt a an und legt durch ihn eine Parallele A zum Lichtstral und eine Parallele B zum Cylinder, so wird eine Ebene, die B enthält und mit A den $\angle \alpha$ bildet parallel zu jener Tangentialebene sein. Denkt man sich daher einen Drehkegel, der a zur Spitze, A zur Achse und α als Oeffnungswinkel hat, und legt man an diesen Kegel durch B eine Tangentialebene, die

ihn nach der Geraden C berührt (zur Aufsuchung von C wird man wieder ein rechtwinkeliges Tafelsystem $\mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$ so annehmen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp A$ ist), so ist jene Tangentialebene $\parallel C$. Legt man daher an den gegebenen Cylinder eine Tangentialebene, die $\parallel C$ ist, so ist ihre Berührungslinie die verlangte Isophote. — Die Ausführung der Zeichnung wollen wir dem Schüler überlassen.

Fig. 190. 500. Aufg. Die Isophote einer Kugel zu finden, wenn wieder $\sin \alpha$, und damit auch α , gegeben ist.

Auf. Es sei a (Fig. 190) das Centrum, A der in der $\mathfrak{T}_2$ liegende grösste Kugelkreis und B der durch a gehende Lichtstral. Betrachten wir nun die Kugel als Drehfläche mit der Axe a_1 und dem Hauptmeridian A , und die Ebene B_1 als $\mathfrak{T}_3$, die wir um die Axe (a_1) drehen, bis sie mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt, und mit dieser umklappen, so fällt der dritte Riss des neuen (in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden) Hauptmeridians C auf A_2 . Wie man den dritten Riss B_3 des Lichtstrales mittelst eines Punktes b desselben findet, ist bekannt. Benützen wir nun das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3$ und nehmen auf B einen Punkt c so an, dass eine von c_3 an C_3 gezogene Tangente D_3 mit A_3 den Winkel α bildet, so wird der Drehungskegel DB (dessen Erzeugende D und dessen Axe B ist) die Kugel nach einem Kreise E berühren, welcher die Eigenschaft hat, dass alle Tangentialebenen der Kugel in den Punkten von E gleiche Winkel mit dem Lichtstral bilden (und zwar Winkel $= \wedge \alpha$). Demnach ist E die verlangte Isophote. Wie man E_3 findet ist sehr einfach, und aus der Figur zu ersehen; wie man aber von E_1 , welches eine Ellipse ist, die Scheitel findet, dürfen wir sicher als bekannt voraussetzen. Noch ist zu bemerken, dass, weil die Risse des Lichtstrals, so wie die der Kugel gegen die durch deren Mittelpunkt gedachte Kante $\mathfrak{R}$ in der Zeichnung symmetrisch liegen, auch E_2 und E_1 in Bezug auf $\mathfrak{R}$ symmetrisch angeordnet sind und somit E_2 aus E_1 leicht erhalten werden kann.

Anm. Hieraus sieht man gleich an einem Beispiele, welchen Nutzen die gewöhnliche Annahme der Lichtstralenrichtung, wonach dieselbe mit beiden Tafeln gleiche Winkeln bildet, gewährt. Dadurch aber, dass noch die Risse des Lichtstrales Winkel von 45° mit $\mathfrak{R}$ einschliessen, bildet der Lichtstral auch mit derjenigen $\mathfrak{T}_3$, welche auf $\mathfrak{R}$ senkrecht steht, denselben Winkel, wie mit

$\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$, und findet demnach die erwähnte Symmetrie auch in Bezug auf $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_3$, sowie auf $\mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}_3$ statt.

501. Aufg. Eine Isophote von bestimmter Qualität für Fig. 191. eine beliebige Drehfläche zu finden.

Aufl. Suchen wir die Isophote der Fläche für einen $\angle \alpha$, so muss eine Tangentialebene der Fläche in einem Punkte b der Isophote mit dem Lichtstrale den $\angle \alpha$ bilden; dies muss aber auch die Tangentialebene einer Fläche thun, welche die gegebene in b berührt. Wir können also an die Stelle der gegebenen Fläche eine andere sie in b berührende Fläche setzen. Als eine solche Hilfsfläche wird sich, wie aus der vorigen Nr. hervorgeht, eine Kugel eignen, und zwar eine solche, welche die Drehfläche nach einem durch b gehenden Parallelkreis berührt.

Um also einen Punkt der Isophote einer Drehfläche $\mathfrak{A}$ zu finden, nehmen wir eine Kugel $\mathfrak{B}$ an, die $\mathfrak{A}$ nach einem Parallelkreis berührt und suchen den auf diesem liegenden Punkt der Isophote für $\mathfrak{B}$ auf. Für $\mathfrak{B}$ ist aber der Ort des Punktes (s. 500) ein Kreis E ; wo nun E und der Parallelkreis sich schneiden, da ist der verlangte Punkt.

Für die Ausführung der Aufgabe sei a , der erste Riss der Drehaxe und A der halbe Hauptmeridian, und nehmen wir wieder (wie in 500) die Meridianebene B_1 , welche parallel zum Lichtstral ist, und daher einen die Axe a_1 schneidenden Lichtstral B enthält, als $\mathfrak{I}_3$ und klappen sie so, wie in voriger Nummer, um. Nehmen wir nun einen Parallelkreis D an und zeichnen die Kugel, welche die Drehfläche nach D berührt (deren Mittelpunkt a also in der Drehaxe liegt), so erhalten wir (wenn wir den Lichtstral B durch a legen) in derselben Art wie oben (500) E_3 ; wo dann E_3 und D_3 (welches ja vermöge unserer Umklappung mit D_2 zusammenfällt) sich schneiden, ist der dritte Riss (b_3) des gesuchten Punktes b (wie man b_1 und b_2 aus b_3 findet, wobei sich ergibt, dass es zwei solche Punkte gibt, können wir wohl dem Schüler überlassen). In ähnlicher Art erhalten wir für die übrigen Parallelkreise, worunter wir auch den Aequator annehmen, wenn ein solcher vorhanden ist) die ihnen entsprechenden Punkte.

Zeichnen wir an dem Hauptmeridian eine Tangente F_3 , die mit B_3 den $\angle \alpha$ bildet, so ist der Berührungspunkt von F_3 und

B_2 der dritte Riss eines Punktes auf dem in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden Meridian, und der diesem Punkte entsprechenden Parallelkreis, der Grenzkreis. Wenn wir so alle Grenzkreise zuerst zeichnen, so erfahren wir, zwischen welchen Grenzen wir die Parallelkreise annehmen müssen, um wirklich Punkte der Isophote zu erhalten.

Anm. Ist die Axe der Drehfläche nicht senkrecht zu einer Tafel, so nimmt man ein neues Tafelsystem zu Hilfe, dessen eine Tafel senkrecht zur Drehaxe ist.

502. Ist die Drehfläche ein Cylinder oder Kegel, so suchen wir auch mit Hilfe einer Kugel, welche die Fläche nach einem Parallelkreise berührt, einen Punkt der Isophote. Mit diesem einen Punkt aber ist die Isophote, welche eine Gerade der Fläche ist, schon bestimmt.

503. Alle Flächen, deren Isophoten wir bisher nicht näher besprochen haben, führen auf so complicirte Konstruktionen ihrer Isophoten, dass man diese lieber nicht konstruirt und die verschiedenen Töne, die man dem beleuchteten Theile zwischen dem höchsten Lichte und der Schattenlinie gibt, nach dem Gefühle feststellt. Gleichwohl wollen wir der Vollständigkeit wegen angeben, auf welche Art wir auch deren Isophoten erhalten können.

1) Wollen wir die Isophote einer windschiefen Fläche für einen gegebenen $\angle \alpha$ erhalten, so geben wir die Punkte der Isophote auf den einzelnen Erzeugenden an, und verbinden diese Punkte durch eine Linie. Um aber einen solchen Punkt auf einer Erzeugenden A zu erhalten, müssen wir den Punkt der Erzeugenden bestimmen, in welchem die Tangentialebene mit dem Lichtstrahl den $\angle \alpha$ bildet. Da aber bekanntlich jede durch A gelegte Ebene Tangentialebene der Fläche ist, so müssen wir durch A eine Ebene legen, die mit dem Lichtstrahl einen $\angle \alpha$ bildet; diese Ebene ist dann die verlangte Tangentialebene, und ihr Berührungspunkt der verlangte Punkt der Isophote (wie man einen solchen Berührungspunkt findet, ist früher bei den windschiefen Flächen angegeben).

2) Will man für irgend eine andere Fläche von einer Isophote (mit dem $\angle \alpha$) den Punkt, welchen sie mit einer Erzeugenden A gemein hat, finden, so denke man sich in allen Punkten von A Tangentialebenen an die Fläche gelegt, so umhüllen sie eine ent-

wickelbare Fläche $\mathfrak{A}$ (welche meistens einen Kegel oder Cylinder vorstellen). Sucht man nun (nach oben angegebenen Regeln) die Isophote B von $\mathfrak{A}$ für den $\angle \alpha$, so ist der Schnitt von A und B der verlangte Punkt.

§ 34.

Ausführung der Schattirung.

504. Hat man für alle Grenzflächen eines gegebenen Körpers die Schattengrenzen und die höchsten Lichter aufgesucht und will man nun die Schattirung wirklich ausführen, so muss noch untersucht werden, wie man sowohl im Licht als im Schatten abtönt, d. h. wie man an den verschiedenen Stellen die richtigen Tonstärken findet.

Was nun zunächst die Abtönung des Lichts einer Fläche betrifft, so benützen wir dazu die Isophoten und zwar in der Art, dass wir zwischen dem absoluten höchsten Lichte (d. h. der Stelle wo $\sin \alpha = 1$ ist) und der Schattenlinie eine gewisse nicht zu kleine Anzahl von Isophoten bestimmter Qualität aufsuchen und dadurch die ganze Lichtseite in Zonen theilen, deren jede von zwei nächstliegenden Isophoten eingeschlossen ist. Wir geben dann jeder solchen Zone an allen Stellen denselben Ton, obgleich dies eigentlich nicht richtig ist (da doch der Ton gegen die Schattenlinie hin dunkler und gegen das höchste Licht schwächer gehalten sein sollte). Allein diese Zunahme des Tones einer Zone ist um so geringer in je mehr Zonen wir die Lichtseite theilen und der gemachte Fehler also nicht bedeutend, wenn wir viele Zonen annehmen. Man pflegt nun zwischen dem höchsten Licht und der Schattenlinie zehn Zonen also neun Isophoten anzunehmen, deren Qualitäten ($\sin \alpha$, s. Nr. 495) nach einander von der Schattenlinie anfangend die Werthe $\frac{1}{10}$ bis $\frac{9}{10}$ haben, während die Schattenlinie selbst eine Isophote mit dem Qualitätswerthe 0 vorstellt. Man gibt dann jeder Zone den Ton, welcher der (sie begrenzenden) Isophote von stärkerer Beleuchtung entspricht. Demnach erhalten die zehn aufeinander folgenden Zonen vom höchsten Lichte aus gezählt, die Lichtstärken 1 bis $\frac{1}{10}$.

Zur annähernden Hervorbringung dieser Töne verfährt man in folgender Weise, wobei wir annehmen wollen, dass wir die Zone

zwischen dem absoluten höchsten Lichte und der nächsten Isophote $\mathfrak{Z}_0$, die folgende Zone $\mathfrak{Z}_1$ u. s. w. nennen. Man lässt die Zone $\mathfrak{Z}_0$ weiss und bedeckt die übrigen neun Zonen mit einem schwachen Tushton. Sodann überzieht man mit Ausnahme der Zone $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_1$, die übrigen acht mit einem etwas stärkeren Ton, dann die letzten sieben Zonen mit noch mehr verstärktem Ton u. s. w. bis man endlich nur noch die letzte Zone allein überzieht. Die Töne, welche auf diese Art schliesslich die aufeinander folgenden Zonen $\mathfrak{Z}_0$ bis $\mathfrak{Z}_9$ erhalten, wollen wir mit T_0 bis T_9 bezeichnen. Wie stark man die nacheinander anzuwendenden Tuschtöne machen soll, kann nur ein (durch Uebung zu erreichendes) richtiges Gefühl sagen. Allein auch ohne dieses Gefühl wird man durch das angegebene Verfahren ein brauchbares, wenn auch nicht immer gleich effektvolles Resultat erzielen.

505. Es kann kommen, dass die Lichtseite einer Begrenzungsfläche eines Körpers nicht alle die obengenannten zehn Zonen zulässt, indem entweder diese Begrenzungsfläche ein Theil einer Fläche ist, auf dem einige der Zonen fehlen, oder indem die Fläche ihrer Natur nach einige der Zonen nicht enthält. In diesem Falle zeichnet man natürlich nur die Zonen, die möglich sind, und belegt dann die ganze Lichtfläche mit den aufeinanderfolgenden Tönen so oft, als es der hellsten Zone entspricht und dann erst lässt man diese Zone frei und belegt die folgenden Zonen mit dem nächsten Ton etc. Steht z. B. ein Kreiscylinder senkrecht zur $\mathfrak{Z}_1$, so wird sein höchstes Licht eine Isophote von nahezu der Qualität $\frac{8}{10}$ vorstellen, so dass hier die zwei ersten Zonen fehlen. Demnach wird hier die ganze Lichtseite erst mit dem ersten Tone, dann mit dem zweiten Tone belegt, und nun die letzten sieben Zonen mit dem dritten, dann die letzten sechs mit dem vierten u. s. w. bedeckt.

506. Es ist leicht einzusehen, dass die Aufsuchung so vieler Isophoten eine mühsame Arbeit ist, die man gerne so viel als möglich entbehrlich macht. Man kann sich nun die Sache dadurch erleichtern, dass man zunächst nur fünf Zonen herstellt, indem man die Isophoten von den Qualitäten $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$ konstruirt und die übrigen Isophoten nach dem Augenmasse aus freier Hand einfügt. Aber auch die erstgenannten fünf Zonen kann man zum Theile oder ganz aus freier Hand bei einiger

Uebung zeichnen, wenn man sich namentlich eine Zeichnung zum Muster nimmt, in welchem eine Fläche derselben Art und in derselben Lage gegen die Tafeln dargestellt und die Isophoten dazu konstruiert sind.

507. Nicht blos auf der Lichtseite einer Fläche muss man nach den betreffenden Lichtstärken abtönen, sondern auch auf den beschatteten Stellen sind verschieden starke Töne zu sehen. Denn wenn wir auch voraussetzen, dass der Körper von einer einzigen Lichtquelle beleuchtet wird, so bilden sich doch durch diese (direkte) Quelle von selbst noch weitere (indirekte) Quellen die wir berücksichtigen müssen. Solche indirekte Lichtquellen sind alle beleuchteten Körper, welche an ihren beleuchteten Stellen das Licht reflektieren und so den beschatteten Stellen eines Körpers Licht zuführen. Man nennt daher die durch reflektirtes Licht erhellten Schattenstellen Reflexe.

Es ist klar, dass diese Reflexe, welche von der Anordnung und Beschaffenheit der verschiedenen reflektirenden Körper abhängen, sich nicht genau bestimmen lassen. Wenn man dieselben aber in der Natur beobachtet, so wird man gewisse Gesetze finden, nach denen die Schatten abgetönt sind. Diese Gesetze sind aber verschieden je nach der Art der Schatten, wir wollen daher voraus die verschiedenen Arten von Schatten genau feststellen.

508. Wird der Körper von einer Geraden in höchstens Fig. 192. zwei Punkten geschnitten, so dass jeder ebene Schnitt des Körpers eine durchaus konvexe Figur vorstellt, so sind seine sämtlichen Streifschattengrenzen die Grenzen des Schattens und Lichtes und der ganze Schatten auf dem Körper wird sein Selbstschatten genannt. Hat aber der Körper konkave Stellen und in Folge dessen Schlagschattengrenzen (s. 468), so kann es sein und ist auch gewöhnlich der Fall, dass auf ihm zweierlei Schatten vorkommen, nemlich Selbstschatten und Schlag-schatten. Wir haben nun festzustellen, wie wir diese beiden Arten von Schatten unterscheiden können. Ist nun (Fig. 192) A der Schnitt des Körpers mit einer den Stral B enthaltenden Ebene (hier deutet wieder die Schraffirung die Materie des Körpers an), so ist nach früheren Auseinandersetzungen b ein Punkt der reelen, c einer der virtuellen Streifschattengrenze und a

ein Punkt der Schlagschattengrenze, und ist der Bogen bca beschattet. Es ist aber leicht zu erkennen, dass man den Schatten auf dem Bogen ac beseitigen kann (so dass dann dieser Bogen beleuchtet ist) wenn man das Stück dcb wegnimmt; dagegen lässt sich der Schatten auf $\widehat{bc}$ nicht entfernen. Durch eine Betrachtung dieser Art kann man stets den Selbstschatten vom Schlagschatten unterscheiden. Es ist nemlich der Schatten Selbstschatten, der sich nicht beseitigen lässt und derjenige Schatten Schlagschatten, der durch Hinwegnahme eines Theiles der vorhandenen Materie beseitigt werden kann.

Zugleich sieht man auch, dass die Grenze zwischen den beiden aneinander stossenden Schatten (Selbstschatten und Schlagschatten) die virtuelle Schattenlinie ist.

509. Nachdem wir nun im Stande sind, die beiden Arten von Schatten, nemlich Selbstschatten und Schlagschatten, mit Sicherheit zu unterscheiden, wollen wir die Gesetze angeben, nach denen diese Schatten abgetönt werden müssen, damit sie mit den in der Natur beobachteten Abtönungen übereinstimmen. Zu dem Ende ist vorerst zu bemerken, dass auch auf den beschatteten Theilen der Flächen Isophoten gezeichnet werden müssen, welche Zonen bilden, nur dass wir für die beschatteten Stellen zwischen dem absoluten höchsten Lichte und der Schattenlinie nur vier Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$) einfügen, und daher nur fünf Zonen (die Doppelzonen $3_0 3_1$, $3_2 3_3$, $3_4 3_5$, $3_6 3_7$, $3_8 3_9$) erhalten. Bezüglich der Abtönung dieser Zonen aber haben wir wesentlich zwischen Selbstschatten und Schlagschatten zu unterscheiden.

Für den Selbstschatten lässt man vom absoluten höchsten Lichte bis zur Schattenlinie den Ton an Stärke zunehmen, nur dass man am höchsten Lichte schon mit einem starken Tone anfängt. Man kann festsetzen, dass man die obengenannten fünf Doppelzonen mit folgenden darunter stehenden Tönen versieht, welche in ihrer Stärke beziehungsweise mit den oben (504) angegebenen Tönen (T_0 bis T_9) übereinstimmen:

$$\begin{array}{ccccc} 3_0 3_1 & 3_2 3_3 & 3_4 3_5 & 3_6 3_7 & 3_8 3_9 \\ T_5 & T_6 & T_7 & T_8 & T_9 \end{array}$$

Für den Schlagschatten hingegen werden die Töne der Zonen um so dunkler gehalten, je heller der Ton der entsprechenden Zone wäre, wenn man den Schlagschatten beseitigen würde. Wir wollen übereinkommen, den fünf Doppelzonen des Schlagschattens folgende darunter stehenden Tonstärken zu geben:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z}_3 & \mathfrak{Z}_4 \mathfrak{Z}_5 & \mathfrak{Z}_6 \mathfrak{Z}_7 & \mathfrak{Z}_8 \mathfrak{Z}_9 \\ T_{13} & T_{12} & T_{11} & T_{10} & T_9 \end{array}$$

Was hier unter den Tönen T_{10} bis T_{13} zu verstehen ist, wird man leicht nach dem oben (504) über die Töne T_0 bis T_9 Gesagten entnehmen können und wird in der folgenden Nr. noch deutlicher auseinander gesetzt.

510. Fassen wir nun das bisher über die Ausführung der Schattirung Gesagte zusammen, so sieht man, dass man in folgender Art vorzugehen hat.

1) Man zeichnet auf allen Flächen des zu schattirenden Körpers das absolute höchste Licht, die Schattenlinie und zwischen diesen beiden Dingen vier Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$) entweder durch Konstruktion oder nach dem Augenmasse (bei hinreichender Uebung) mit oder ohne Zuziehung von guten Mustern. Sodann schaltet man auf dem beleuchteten Theil nach dem Augenmasse weitere fünf Isophoten (mit den Qualitäten $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$) ein, wodurch man im Lichte zehn einfache Zonen ($\mathfrak{Z}_0$ bis $\mathfrak{Z}_9$) und im Schatten je fünf Doppelzonen ($\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1$ bis $\mathfrak{Z}_8 \mathfrak{Z}_9$) erhält. Bezeichnet man nun mit t_1 einen schwachen Tushton, mit t_2 einen etwas stärkeren als t_1 , mit t_3 einen etwas stärkeren als t_2 u. s. w., (so dass (s. 504) $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$ u. s. w.) $T_{10} = t_1 + \dots + t_{10}$ u. s. w., $T_{13} = t_1 + \dots + t_{13}$) und die fünf Doppelzonen ($\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1 \dots \mathfrak{Z}_8 \mathfrak{Z}_9$) im Selbstschatten nacheinander mit $\mathfrak{Z}'_5, \mathfrak{Z}'_6 \dots \mathfrak{Z}'_8$, dagegen die fünf Zonen ($\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1 \dots \mathfrak{Z}_8 \mathfrak{Z}_9$) im Schlagschatten nacheinander mit $\mathfrak{Z}''_{13}, \mathfrak{Z}''_{12} \dots \mathfrak{Z}''_9$, so erhält jede Zone einen Ton (T) dessen Index mit dem der Zone übereinstimmt, z. B. erhalten die Zonen $\mathfrak{Z}_9$, $\mathfrak{Z}'_9$ und $\mathfrak{Z}''_9$ den Ton $T_9 = t_1 + \dots + t_9$. Hieraus geht dann klar hervor, wie man durch auf einander folgendes Uebertuschen mit den Tuschtönen t_1, t_2 etc. nach und nach jeder Zone den ihr entsprechenden Ton ertheilen kann.

511. Das eben beschriebene Tuschverfahren, das sich besonders für grössere Körperflächen eignet, bei welchen die Zonen nicht zu schmal ausfallen, kann man das Verfahren mit abgestuften Tönen nennen und ist nur annähernd richtig, da ja in den einzelnen Zonen die Töne von der einen Isophote zur andern stetig zunehmen sollten. Will man diese stetige Zunahme zum Vorschein bringen, so muss man die mit einem Pinsel aufgetragenen Töne durch einen zweiten Pinsel an den Rändern so verwaschen, dass die Töne sich stetig ändern. Man kann dieses Verfahren das mit verwaschenen Tönen nennen. Diesen stetigen Uebergang der Töne kann man aber auch durch Schattirung mit schwarzer Kreide oder mit Bleistift ausführen, wobei die Stärke der Töne an den verschiedenen Stellen durch das Auge beurtheilt werden müssen.

Endlich kann man auch die Schattirung durch Schraffirung (mit parallelen Strichen, deren Stärke man den Tonstärken entsprechend macht) ausführen.

512. In Folge der zwischen dem beleuchteten Körper und dessen Beschauer befindlichen Luft erscheint der Körper um so unklarer, umschleierter, je grösser seine Entfernung vom Beschauer ist. Man nennt diese von der unvollkommenen Durchsichtigkeit herrührende Beleuchtungsmodifikation die Luftperspektive. In Folge von dieser erscheinen gleich stark beleuchtete Flächen im Lichte um so dunkler und im Schatten um so weniger dunkel, je weiter sie vom Beschauer entfernt sind. Obgleich nun diese Luftperspektive sich erst geltend macht bei grössern Entfernungsdifferenzen, so benützt man sie doch schon bei geringen Differenzen, um die Zeichnungen zu verdeutlichen, in folgender Art.

1) Hat man zwei zur $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) parallele ebene Figuren, so denkt man sich die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) so gelegt, dass die Abstände der beiden Ebenen von der $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) positiv sind und hält die mit dem grösseren Abstand (also dem Beschauer näher liegende) deutlicher in der Beleuchtung (d. h. im Lichte heller und im Schatten dunkler), als die andere;

2) hat man eine begrenzte Ebene $\mathfrak{A}$, die schief gegen die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) steht und wieder im positiven Raume der Tafel liegt, so denkt man sich $\mathfrak{A}$ durch mehrere zur $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$)

parallele und gleichweit entfernte Ebenen geschnitten und so in Zonen getheilt, die man mit der Abnahme ihrer Entfernung von der Tafel im Lichte an Helligkeit, im Schatten an Dunkelheit abnehmen lässt.

§ 35.

Ausgeführte Schattenkonstruktionen.

513. Wir wollen nun an einigen Beispielen die bisher aufgestellten Regeln zur Anwendung bringen.

Aufg. Es ist ein zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechter Kreiscylinder (A_1) gegeben, der mit einer quadratischen Platte bedeckt ist; man soll die Schattenkonstruktion an ihm ausführen. Fig. 193.

Aufl. Man sucht zunächst die (in Bezug auf $\mathfrak{T}_2$ sichtbare) Schattenlinie ab des Cylinders. Sodann werden wir uns durch Anschauung überzeugen, dass die einzigen Kanten unseres Körpers, welche Schlagschatten auf ihn werfen, die Geraden ce (deren zweiter Riss c_2 ist) und cd sind. Sucht man nun den Schlagschatten von ce auf dem Cylinder, indem man sich durch ce alle möglichen Stralen gelegt denkt, welche eine Ebene B_2 geben, so ist der Schnitt dieser Ebene mit dem Cylinder eine Curve deren zweiter Riss in B_2 fällt. Weil aber der Schlagschatten, den c auf den Cylinder wirft, offenbar der Punkt c' ist, so sieht man, dass $f'_2 c'_2$ den zweiten Riss des verlangten Schlagschattens vorstellt. Will man den zweiten Riss des Schlagschattens von cd auf den Cylinder, so muss man durch cd eine Stralenebene legen und von deren Schnitt mit dem Cylinder den zweiten Riss suchen. Nun ist aber dieser Schnitt eine Ellipse deren zweiter Riss ihrem ersten Riss gleicht, da die obengenannte Stralenebene gegen die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gleich geneigt ist; da aber der erste Riss der Ellipse die Kreislinie A_1 ist, so ist deren zweiter Riss (A_2) eine Kreislinie von gleichem Halbmesser, und ist nur der Mittelpunkt zu suchen. Es ist aber der Mittelpunkt der Ellipse A offenbar der Schnittpunkt der durch cd gelegten Stralenebene mit der Axe (g_1) des Cylinders und fällt zusammen mit dem Schnitt der Ebene B_2 mit dieser Axe (g_1); demnach ist g dieser Mittelpunkt und g_2 der Mittelpunkt des Kreises A_2 . — Warum nur der zwischen c'_2 und $a_2 b_2$ liegende

Theil von A_2 als Schlagschattengrenze gilt, geht aus den früher aufgestellten Regeln deutlich hervor.

Fig. 194. 514. Aufg. Die Schattenkonstruktion für eine auf einer Horizontalebene (die wir gleich als $\mathfrak{T}_1$ ansehen) liegende Kugel zu finden.

Aufl. Da die Schattenlinie auf der Kugel ein grösster Kreis ist, dessen Ebene auf dem Lichtstral senkrecht steht, so wäre der Riss dieser Schattenlinie eine Gerade, wenn die Tafel mit dem Lichtstral parallel liefe. Darum nehmen wir, wie dies oft von Vorthail ist, eine $\mathfrak{T}_3$ an, die parallel zum Lichtstral A (Fig. 194) ist und auf einer der alten Tafeln, hier auf $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht. Wir wollen eine solche $\mathfrak{T}_3$ eine Stralentaſel nennen. Ist zugleich, wie hier, die Fläche eine Drehfläche deren Axe (wir betrachten hier die Gerade a_1 als Axe der Kugel) $\perp \mathfrak{T}_1$ ist, so klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ so um (wie wir das auch früher bei Drehflächen so gemacht haben), dass wir sie um die Drehungsaxe (a_1) drehen, bis sie mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt und mit dieser gemeinschaftlich umklappen. Dann kommt $\mathfrak{R}_3$ auf $\mathfrak{R}_2$ und a_3 auf a_2 ; sucht man noch b_3 (aus b_1 und b_2) auf bekannte Art, so erhält man A_3 , und ist $c_3 d_2$ ($\perp A_3$) der dritte Riss der Schattenlinie. Wie man daraus den ersten Riss (B_1) dieser Linie (welcher eine Ellipse ist) findet, ist bekannt. Will man das höchste Licht, so müssen wir parallel zu A eine Normale zur Kugel legen; der dritte Riss dieser Normalen ist aber A_3 und folglich e_3 der dritte Riss des höchsten Lichtes, woraus sich dessen erster Riss e_1 auf bekannte Art finden lässt.

Theilt man $\overline{a_2 e_3}$ in zehn gleiche Theile und zieht durch die Theilpunkte Parallele zu $c_3 d_3$, so stellen diese die dritten Risse der zwischen dem höchsten Lichte und der Schattenlinie einzuschaltenden neun Isophoten vor, deren erste Risse Ellipsen sind, (die man aus ihren dritten Rissen in derselben Art findet, wie B_1 aus $c_3 d_3$. (Wir überlassen die Ausführung dem Schüler).

Soll nun noch der Schlagschatten der Kugel auf $\mathfrak{T}_1$ gefunden werden, so ist dies der Schnitt des die Kugel nach der Schattenlinie B berührenden Stralencylinders mit der $\mathfrak{T}_1$ und dieser Schnitt ist eine Ellipse, deren kleine Axe gleich dem Halbmesser der Kugel und deren Mittelpunkt die erste Spur (b) des durch a gehenden Strales A ist. Legt man durch den

Punkt d einen Stral C (dessen dritter Riss durch d_3 geht und parallel A_3 ist), so ist der Schnitt (e) dieses Strals mit der $\mathfrak{T}_1$ ein Scheitel des verlangten Schlagschattens D, der sich nun zeichnen lässt.

515. Aufg. Es sei a_1 der erste Riss der Axe, A der Fig. 195. Hauptmeridian einer Drehfläche und B ein sie begrenzender Parallelkreis, so dass zwischen B und A leerer Raum, also ausserhalb dieses Raumes und unterhalb B die Materie des Körpers sich befindet; man soll den Schlagschatten finden, welchen der Parallelkreis B in die Drehfläche wirft.

Aufl. Zunächst hat man zu bedenken, dass dieser Parallelkreis B theilweise Schattenkante ist und dass die darauf liegenden Grenzpunkte (s. 465) die Schnittpunkte von B mit der Schattenlinie der Drehfläche sind. Um also diese Grenzpunkte zu finden, müssen wir die auf B liegenden Punkte der Schattenlinie suchen. Dies geschieht bekanntlich, indem wir einen Kegel, welcher die Drehfläche nach B berührt, zu Hilfe nehmen und an diesen parallel zum Lichtstral Tangentialebenen legen, welche den Kegel nach Erzeugenden berühren, deren Schnittpunkte mit B die verlangten Grenzpunkte b, c (von denen die zweiten auf B_2 liegenden Risse nicht gezeichnet wurden) sind. Zugleich sieht man durch Anschauung, dass der Bogen bdc die Schattenkante vorstellt.

Wollen wir nun den Schlagschatten den dieser Bogen auf die Drehfläche wirft, so müssen wir durch alle Punkte von B Stralen legen, wodurch wir einen Stralencylinder (mit der Axe C) erhalten, dessen Schnitt mit der Drehfläche ($A_1 a_1$) die verlangte Schlagschattengrenze ist. Um nun hievon einen Punkt zu finden, nehmen wir eine Ebene D_2 ($\parallel \mathfrak{T}_1$) zu Hilfe; diese schneidet die Drehfläche nach einem Parallelkreis und den Cylinder nach einem Kreise von der Grösse des Kreises B. Die Punkte f, g (es sind davon nur die ersten Risse zu zeichnen) in welchen sich die beiden Schnittkreise treffen, sind Punkte der gesuchten Schlagschattengrenze. Besondere Punkte dieser Curve sind noch die Punkte b und c; ferner noch der Schlagschatten des Punktes d auf der Drehfläche. Um diesen zu finden, legen wir durch d einen Lichtstral E dessen dritter Riss (wenn wir wieder die Stralentafel (s. 514) als $\mathfrak{T}_3$ annehmen und so, wie in vor-

ger Nr. umklappen) durch d_3 und h_2 geht. Wo nun E_3 und A_2 sich scheiden, da ist der dritte Riss (k_3) des gesuchten Punktes k , woraus wir leicht durch Zurückklappen k_1 finden.

Anm. Ist B der Aequator, so liegen die Punkte b_1, c_1 in einem zu C_1 senkrechten Durchmesser des Kreises B_1 . Ist die Drehfläche zweiter Ordnung, so hat sie mit dem Stralencylinder der durch B gelegt wurde und der auch zweiter Ordnung ist, eine ebene Curve B gemein, woraus folgt, dass die gesuchte Schlagschattengrenze (und demnach auch ihr erster Riss) ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung ist. Benützt man in diesem Falle zur Aufsuchung der ganzen Schlagschattengrenze die Stralentaſel, so ist der dritte Riss der gesuchten Curve eine Gerade, die leicht zu finden ist und wodurch man auch leicht die Axen seines ersten Risses findet; wir wollen die Ausführung dieses Falles dem Schüler überlassen.

Fig. 196. 516. Aufg. Den Schlagschatten in einer Nische zu konstruieren.

Aufl. Die Nische ist zusammengesetzt aus einem konkaven halben Kreiscylinder (A_1 , Fig. 196) der zwischen zwei parallelen Ebenen A_2, B_2 eingeschlossen ist und dem vierten Theile einer konkaven Kugel, als deren Axe wir die Gerade a_2 und als deren halben zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Meridian den Halbkreis C betrachten. In diesem Falle ist die Gerade cd des Cylinders Schattenkante. Sucht man nach Anleitung der vorigen Nr. (nur dass hier die Axe der Drehfläche senkrecht auf $\mathfrak{T}_2$ steht und dass der Parallelkreis C der Aequator ist) die Schlagschattengrenze auf der Kugel (s. Anm. der vorigen Nr.) so erhält man einen Ellipsenbogen b_2c_2 als zweiten Riss dieser Schlagschattengrenze. (Wie man von dieser Ellipse die Scheitel findet geht aus der vorigen Nr. hervor; wie man aber dann den in B_2 liegenden Punkt e_2 der Ellipse, als Schnitt dieser Curve mit der geraden Linie B_2 findet, ist von früher her bekannt). Will man noch die Schlagschattengrenze auf dem cylindrischen Theile der Nische, so besteht dieser Theil der Schlagschattengrenze theils aus dem geraden Theile f_2g_2 , der von einem Theile der Geraden $c d$, theils aus dem Bogen e_2f_2 , der von der Kreislinie C herrührt. Wie man Punkte des Bogens e_2f_2 findet

ist so einfach, dass wir deren Auffindung wohl dem Schüler überlassen können.

517. Aufg. An einem horizontalen Gesimse, das von zwei Fig. 197. zu den beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$) senkrechten Ebenen A_2 u. B_2 begrenzt wird, die Schattenkonstruktionen auszuführen.

Aufl. Ein solches Gesimse ist ein Cylinder, dessen Profil in einer zu den beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$) senkrechten Ebene liegt. Zur Darstellung dieses Körpers nehmen wir daher am Besten neben der $\mathfrak{T}_2$ nur noch eine $\mathfrak{T}_2$ an, die auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, so dass wir von jedem Punkte den zweiten und dritten Riss zeichnen. Die Figur links von $\mathfrak{R}'_3$ soll das Profil also auch den dritten Riss unseres Gesimses vorstellen, während der zweite Riss zwischen A_2 und B_2 eingeschlossen ist, und die Mantelkanten und Erzeugenden unseres prismatisch-cylindrischen Körpers horizontal sind.

Suchen wir nun zunächst die Schattenlinien unseres Körpers, so finden wir*) eine einzige solche, die reel ist, nemlich die Gerade ab , wenn wir parallel zum Lichtstral an den Cylinder eine Tangentialebene (C_2) legen (s. 478), welche nach einer Geraden berührt, deren dritter Riss a_3 und deren zweiter Riss $a_2 b_2$ ist. In ähnlicher Art finden wir eine virtuele Schattenlinie cd . Nun ist es theils durch Anschauung, theils durch die früher (465) gegebenen Anleitungen leicht, die Schattenkanten zu finden, deren Schlagschatten auf unser Gesims wir zunächst suchen.

So ist der Bogen ec eine Schattenkante, deren Schlagschatten, nemlich der Bogen ce' aus bekannten Gründen so gefunden wird, wie aus der Zeichnung hervorgeht. In ähnlicher Art findet man den Schlagschatten fa' des Bogens af . Sucht man noch den Schlagschatten $e'h'$ der Mantelkante eg , so findet sich, dass nur das Stück eh seinen Schlagschatten auf das Gesimse selbst wirft. Ebenso ist von der Linie ab der Schlagschatten auf dem Gesimse die Gerade $a'c'$ entsprechend dem Stück ac von ab . Wir haben nun zwar alle Schatten auf dem Gesimse konstruirt und wären eigentlich fertig; wir wollen aber hier noch zeigen, wie man den Schlagschatten unseres Gesimses auf

*) Hier ist ganz besonders nothwendig, dass der Schüler die Zeichnung nach Anleitung des Textes selbst entwirft.

die $\mathfrak{T}_3$ findet, ohne überflüssige Linien (d. h. solche Linien, die wir nachher wieder weglöschen müssen) zu zeichnen. Zu dem Ende dürfen wir nur darauf sehen, dass wir bloß die Schlagschatten von Streifschattengrenzen und zwar nur so weit sie nicht auf das Gesimse selbst schon Schatten geworfen haben, (s. 473) aufsuchen.

So sagt uns die Anschauung, dass von dem Bogen, dessen zweiter Riss in B_2 liegt und dessen dritter Riss $e_3 c_3 a_3 f_3$ ist, nur das Stück, dessen zweiter Riss $b_2 h_2$, der Schattenkante angehört, so dass wir bloß hievon den Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_3$ in der durch die Zeichnung zu ersehenden Art suchen. Ebenso haben wir bloß von den Stücken hg und bi (der Linien eh, ab) den Schlagschatten auf $\mathfrak{T}_3$ zu suchen, da die Stücke eh, ai schon ihren Schlagschatten auf das Gesimse geworfen haben. Unter Berücksichtigung dieser Umstände finden wir dann, in der aus der Zeichnung deutlich hervorgehenden Art, die verlangte Schlagschattengrenze auf $\mathfrak{T}_3$ ohne jede überflüssige Linie.

Anm. Der Schüler versuche die Schattenkonstruktion für ein horizontales Gesimse wie das eben Behandelte, nur dass es nicht zwischen zwei Ebenen A_2, B_2 (die $\perp \mathfrak{T}_1$ und $\perp \mathfrak{T}_2$) liegt, sondern zwischen zwei bloß zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebenen, die mit der $\mathfrak{T}_2$ Winkel von 45° bilden und sich nach einer hinter dem Gesimse liegenden Geraden schneiden.

Fig. 198. 518. Aufg. An einem Wulste ($A_1 a_1$) dessen Axe a_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, die Schattenkonstruktion auszuführen.

Aufl. Wir konstruieren zunächst die Schattenlinie des Wulstes nach den früher (394) gegebenen Regeln, wobei wir in jedem Riss nur die Theile der Schattenlinie zeichnen, welche in Bezug auf die entsprechende Tafel sichtbar sind. Wir erhalten zwei getrennte Schattenlinien (B, C); B gehört dem konvexen, C dem konkaven Theile des Wulstes an und ist C_2 ganz unsichtbar, während von C_1 die (gezeichnete) Hälfte sichtbar ist. Dieses C_1 berührt stets den ersten Riss des Wulstäquators in einem Punkte c_1 so, dass eine Tangente an C_1 im Punkte c_1 parallel mit S_1 (dem ersten Risse des Lichtstrals) ist. Wenn aber, wie in unsrer Zeichnung (Fig. 198), an C_1 noch eine Tangente parallel zu S_1 möglich ist, die nach einem (außerhalb des ersten Risses des Äquators liegenden) Punkte b_1 berührt,

so kann man sich leicht überzeugen, dass der Bogen von C , dessen erster Riss b_1c_1 ist, eine virtuelle Schattenlinie ist. Nimmt man nemlich eine Parallele zu S_1 an, die zwischen b_1 und c_1 liegt, z. B. die D_1 (dieses D_1 schneidet C_1 in d_1 und e_1) so schneidet die Ebene D_1 den Wulst nach einer Curve D_3 (Fig. 198 a). Legt man an diese Curve Tangenten parallel zum Lichtstral, so berühren sie nach Punkten d_3 und e_3 deren ersten Risse d_1 , e_1 sind. Man sieht aber (aus 198 a), dass e (und somit alle zwischen b und c liegenden Punkte der Schattenlinie) der virtuellen Schattenlinie angehört. Zugleich aber sieht man (aus 198 a), dass der in d streifende Stral den Wulst in einem Punkte f schneidet, d. h. dass der reele Theil der Schattenlinie C auf den Wulst Schlagschatten wirft. Wir haben diesen Schlagschatten auf einer Seite von S_1 gezeichnet; wie man ihn findet ist bekannt. Wir denken uns nemlich durch alle Punkte von C Stralen gelegt, welche einen Stralencylinder geben und suchen den Schnitt dieses Cylinders mit dem Wulst (s. 441).

Siebenter Abschnitt.

Parallel - Perspektive.

§ 36.

Allgemeine Erklärungen darüber.

519. Die meisten in der Anwendung vorkommenden Körper enthalten rechtwinkelige Parallelepipede, oder wenigstens drei Systeme von Parallellinien (eines parallel zu X, eines zu Y, und eines zu Z), die gegenseitig auf einander senkrecht stehen, und so liegen, dass das eine (Z) vertikal steht, während die beiden andern (X, Y) horizontal liegen. Zur graphischen Bestimmung solcher Körper nehmen wir bekanntlich zwei aufeinander senkrechte Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) so an, dass die eine ($\mathfrak{T}_1$) horizontal (also senkrecht zum System Z), die andere ($\mathfrak{T}_2$) vertikal und parallel zum System X (also senkrecht zu Y) ist. Meistens brauchen wir noch eine dritte Tafel ($\mathfrak{T}_3$), die senkrecht zu X steht (die Seitentafel). Zeichnen wir die Risse der Punkte und Linien des bestimmenden Körpers auf diesen drei Tafeln, so ist dadurch der Körper bestimmt, und kann man auch aus diesen Rissen die Masse für die vorkommenden Strecken und Winkel abnehmen. So sehr sich desshalb diese drei Risse für Zeichnungen eignen, nach denen gearbeitet wird, so haben sie doch den Nachtheil, dass sie nicht übersichtlich sind, da man die drei Risse zusammenhalten muss, um daraus die Gestalt des Körpers zu erkennen.

Zu einer übersichtlichen graphischen Darstellung des erwähnten Körpers eignet sich besser ein Riss auf einer neuen Tafel [wir wollen sie $\mathfrak{T}'$ (sprich: Tafel prim) und einen Riss auf ihr $\mathfrak{R}'$ (sprich: Riss prim) nennen] die gegen die drei Geraden X, Y, Z schief steht.

Fig. 199.b. 520. Hat man nun ein rechtwinkliches Parallelepiped — wir wollen diesen Körper von nun an kürzer Rechtseit nen-

nen — mit vertikalen Kanten, deren eine wir mit Z bezeichnen, und sucht man die Risse seiner Seitenflächen auf der $\mathfrak{Z}'$, indem man durch die Ecken des Körpers parallele Stralen (die je nach Umständen zu der $\mathfrak{Z}'$ senkrecht oder auch schief stehen) legt, und ihre Schnitte mit $\mathfrak{Z}'$ sucht, so werden die $\mathfrak{K}'$ aller Seiten Parallelogramme, und der ganze $\mathfrak{K}'$ des Körpers wird die Gestalt (Fig. 199. b) annehmen.

Wie wir die $\mathfrak{Z}'$ und die Stralen am besten annehmen, und wie wir daraus die Zeichnung finden, werden wir noch angeben. Zunächst sei nur bemerkt, dass wir stets diese den $\mathfrak{K}'$ vorstellende Zeichnung so in unser Blatt legen werden, dass die $\mathfrak{K}'$ derjenigen Kanten des Rechtseits (rechtwinkliches Parallelepiped), welche vertikal stehen, senkrecht zum unteren Rande des Blattes werden, und dass die unteren Punkte dieser Kanten den unteren Punkten ihrer $\mathfrak{K}'$ entsprechen.

521. Um den $\mathfrak{K}'$ eines Rechtseits zu finden, können wir Fig. 199. a. so verfahren, dass wir, in seiner bequemsten Stellung gegen die Tafeln ($\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$), seinen ersten und zweiten Riss (Fig. 199. a) zeichnen und dann die $\mathfrak{Z}'$ und die Richtung der Stralen annehmen und daraus den $\mathfrak{K}'$ nach früheren Regeln suchen. Dann würde sich herausstellen, welchen Winkel die $\mathfrak{K}'$ (X', Y', Z') mit einander bilden. Ferner würde sich dann ergeben, in welchen Verhältnissen die Längen dieser Kanten (X, Y, Z) zu den Längen ihrer $\mathfrak{K}'$ (X', Y', Z') stehen. Allein wir ziehen es vor ein anderes Verfahren einzuschlagen, theils weil es bequemer ist, theils deshalb, damit die genannten Winkel sowie die genannten Verhältnisse so ausfallen, wie wir es für vortheilhaft halten. Wir werden uns nemlich überzeugen, dass, wenn das Rechtseit durch seine Risse (Fig. 199. a) gegeben ist, wir die $\mathfrak{K}'$ von drei in einem Ecke zusammenstossenden Kanten, und somit den (Fig. 199. b) des Rechtseits selbst annehmen dürfen, und es wird immer eine Lage der $\mathfrak{Z}'$ und der Stralen sich finden, die dieser Annahme entspricht.

522. Haben wir drei von einem Punkte o ausgehende Fig. 200. auf einander senkrechte oder auch schief gegen einander gestellte Gerade oa, ob, oc und legen wir durch o einen Stral, so können wir dessen Lage gegen die Geraden am Besten

dadurch bestimmen, dass wir den Punkt o angeben, in welchem der von o ausgehende Stral die Ebene abc trifft.

Nehmen wir an, es liegen die Punkte a, b, c (Fig. 200. a) in unserem Zeichnungsblatt, und es treffe der durch o gehende Stral die Ebene abc (also unser Zeichnungsblatt) in o (Wir haben hier diesen Punkt ausserhalb des Dreiecks abc angenommen; er kann aber auch innerhalb desselben, ja selbst in einer Seite, sogar auch in einem Eckpunkte des Dreiecks liegen). Zieht man noch ab und co (welche sich in d schneiden) und denkt man sich durch a, b, c, d und o Stralen gelegt, die parallel oo sind, so werden diese von einer beliebig angenommenen Tafel ($\mathfrak{T}'$) nach den Punkten a', b', c', d' und o' geschnitten, deren gegenseitige Lage, je nach der Lage der $\mathfrak{T}'$, verschieden ausfällt. Jedenfalls aber ist $\overline{a'd'} : \overline{b'd'} = \overline{ab} : \overline{bd}$ und $\overline{c'd'} : \overline{d'o'} = \overline{cd} : \overline{do}$. Ist also das Rechtseit gegeben (und damit auch das Dreieck abc , dessen Seiten drei Diagonalen der Seitenflächen des Rechtseits sind) und nimmt man die Figur $a'b'c'd'o'$ zuerst beliebig an, so ist daraus die Figur $abcdo$ und damit die Richtung des Strales oo bestimmt. Denn zieht man in dem gegebenen Dreiecke abc die Seite ab , so kann man mittelst obiger Proportionen zuerst d und dann o finden. Man kann aber nun auch die Lage der $\mathfrak{T}'$ angeben. Denn denkt man sich durch a, b, c Stralen parallel zu oo gelegt, die man als Mantelkanten eines dreiseitigen Prisma's betrachtet, und dieses durch eine Ebene normal geschnitten, so kann man den Normalschnitt finden. Nun hat man aber noch die Aufgabe, die $\mathfrak{T}'$ so anzunehmen, dass sie das dreiseitige Prisma nach einem zur Figur $a'b'c'$ ähnlichen Dreieck schneidet — eine Aufgabe, die sich (s. 134) stets lösen lässt.

Fig. 199.

523. Man sieht also, dass, wenn man eine gegebene Pyramide $oabc$ hat, die Gestalt ihres $\mathfrak{R}'$ beliebig angenommen werden kann, dass aber dieser angenommene $\mathfrak{R}'$ dem zu suchenden $\mathfrak{R}'$ nicht kongruent, sondern bloß ähnlich ist. Man hätte also noch zu suchen, in welchem Verhältniss man den angenommenen $\mathfrak{R}'$ vergrössern oder verkleinern muss, um den wirklichen $\mathfrak{R}'$ zu erhalten. Da es uns aber stets frei steht eine Zeichnung in einem verkleinerten oder vergrösserten Massstab herzustellen, wenn wir nur das Verhältniss dieses

Maßstabes zur wirklichen Grösse wissen, so können wir den $\mathcal{K}$ unseres Körpers in der That beliebig annehmen, wenn wir nur angeben, wie gross X, Y, Z wirklich sein sollen. Dieser Satz, dass man den $\mathcal{K}$ einer dreiseitigen Pyramide beliebig annehmen darf, wird, nach seinem Entdecker, der Pohl'sche Satz genannt.

524. Der $\mathcal{K}$ eines Rechtsits hat zum Umriss ein Sechseck (Fig. 199 b), innerhalb desselben zwei Punkte (a', b') liegen, b u. c. welche die $\mathcal{K}$ von Ecken des Rechtsits vorstellen und zwar ist a' der $\mathcal{K}$ eines Punktes der oberen, b' der unteren Seite des Rechtsits. Zeichnen wir nun, wie in Fig. 199 b, die von a' ausgehenden Kanten als sichtbare, so dass also die obere Fläche des Rechtsits sichtbar ist, so wollen wir diesen $\mathcal{K}$ Übersicht heissen. Zeichnen wir aber, wie in Fig. 109 c so, dass die untere Fläche sichtbar ist, so wollen wir diesen $\mathcal{K}$ Untersicht nennen. In beiden Fällen wollen wir denjenigen innerhalb des Sechsecks liegenden Punkt, der als sichtbar angesehen wird, als den $\mathcal{K}$ des Anfangspunktes (Ursprung) und die von ihm ausgehenden Kanten (X', Y, Z') als die $\mathcal{K}$ der Koordinatenachsen betrachten, von denen, wir wiederholen es, X parallel und Y senkrecht zum Schnitt der beiden Tafeln ($\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$) ist. Zugleich setzen wir hier ein für allemal fest, dass in allen folgenden Parallel-Perspectiven der Ursprung stets ein vorderer Eckpunkt des Rechtsits (Fig. 199 a) ist, der

- 1) für Übersicht rechts oben
 - 2) für Untersicht links unten
- liegt. Ferner setzen wir fest, dass X'

- 1) für Übersicht links von Z'
- 2) für Untersicht rechts von Z'

liegt, wie dies aus unserer Zeichnung zu ersehen ist. In Folge dieser Feststellungen können wir für Ober- und Untersicht stets angeben, welche Eckpunkte des Rechtsits den Eckpunkten in seinem $\mathcal{K}$ entsprechen.

525. Hat man von einem Rechtsit den $\mathcal{K}$ zu suchen, so hat das keine Schwierigkeit, da wir zunächst die $\mathcal{K}$ von X, Y, Z beliebig annehmen können. Sollen aber nun die $\mathcal{K}$ der übrigen

Ecken und Kanten gezeichnet werden, so müssen wir uns erinnern, dass für Parallelrisse der Satz gilt:

Parallele Gerade haben parallele $\mathfrak{K}'$.

Dadurch können wir leicht die $\mathfrak{K}'$ der Kanten des Rechtseits finden. Sollen aber die $\mathfrak{K}'$ von anderen Punkten gesucht werden, so brauchen wir noch den Satz:

Die $\mathfrak{K}'$ paralleler Strecken verhalten sich wie die Strecken selbst.

526. Ist ein Rechtseit durch seine Risse ($\mathfrak{K}_1$ u. $\mathfrak{K}_2$) gegeben und hat man seinen $\mathfrak{K}'$ angenommen und soll der $\mathfrak{K}'$ eines auf einer Kante (z. B. ab) des Körpers angenommenen Punktes m gefunden werden, so findet man m' durch die Proportion $\overline{a'm'} : \overline{am} = \overline{a'b'} : \overline{ab}$. Es ist also am wie eine vierte Proportionale (auf bekannte Art) durch Konstruktion zu finden.

Anm. Ist, wie gewöhnlich, die Länge der Kante ab ebenso wie alle anderen Strecken durch eine Anzahl Längeneinheiten eines bestimmten Maßstabs gegeben, so bestimmt man ihren $\mathfrak{K}'$, den man, wie oben gezeigt, beliebig annehmen kann, indem man den Maßstab für diesen $\mathfrak{K}'$ festsetzt. In diesem Falle findet man $a'm'$, indem man am nach dem Maßstab von ab und für $a'm'$ ebensoviele Längeneinheiten nach dem Maßstab des $\mathfrak{K}'$ von $a'b'$ nimmt.

Fig. 201. 527. Ist, ausser den Rissen und dem $\mathfrak{K}'$ eines Rechtseits (von dem $\mathfrak{K}'$ sind hier blos drei zusammenstossende Kanten gezeichnet) ein beliebiger Punkt a durch seine Risse (a_1, a_2) gegeben (Fig. 201 a) und sollen wir seinen $\mathfrak{K}'$ suchen, so betrachten wir drei in einem Ecke o zusammenstossende Kanten des Rechtseits als Koordinatenachsen (X, Y, Z) und bestimmen, wie aus der Zeichnung (Fig. 201 a) ersichtlich, die Koordinaten (x, y, z) des Punktes a . Hieraus suchen wir die Längen dieser Koordinaten im $\mathfrak{K}'$ (Fig. 201 b), wobei wir, wie aus voriger Nr. hervorgeht, x', y', z' entweder als vierte Proportionale konstruieren, oder ausser dem Maßstab für X, Y, Z noch drei Maßstäbe, nemlich für X' , für Y' und für Z' geben und darnach x', y' und z' beziehungsweise messen. Wie man nun in dem $\mathfrak{K}'$ aus $x' y' z'$ den $\mathfrak{K}'$ von a , nemlich a' (Fig. 201 b) findet, geht klar aus der Zeichnung hervor.

Hiebei sieht man, dass der (in Fig. 201b) mit a'_1 bezeichnete Punkt der $\mathfrak{R}'$ des in der $\mathfrak{Z}_1$, (als welche, wir stets $X Y$ ansehen), liegenden ersten Risses (a_1) von a ist.

528. Hat man wieder den $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}'$ eines Rechtseits Fig. 201. und sind (in Fig. 201b) a'_1 und a' gegeben und sollen hieraus a_1 und a_2 (Fig. 201a) des entsprechenden Punktes a gesucht werden, so dürfen wir nur den umgekehrten Weg der vorigen Nr. einschlagen, um die verlangten Risse (a'_1 und a_2) zu erhalten.

Hätte man aber bloß a' gegeben (und a'_1 nicht) so könnte man von a' eine Parallele zu Z' zeichnen, darauf den Punkt a'_1 beliebig annehmen und dann a_1, a_2 suchen; es gäbe also unendlich viele Punkte a , die dem a' entsprechen. Während also, sobald $X' Y', Z'$ angenommen sind aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes sich sein $\mathfrak{R}'$ bestimmt finden lässt, ist umgekehrt aus a' das a_1 und a_2 , also auch der Punkt a nicht bestimmt. Dies lässt sich leicht erklären; denn a' ist ein einziger Riss des Punktes a , und mit einem Riss ist ein Punkt nicht bestimmt, sondern nur ein Stral, in dem der Punkt liegen soll.

Will man also mit dem oben angegebenen Verfahren nicht bloß den $\mathfrak{R}'$ eines Körpers aufsuchen, sondern auch den Körper bestimmen, so muss man für jeden Punkt a , dessen $\mathfrak{R}'$ (a') gezeichnet ist, auch noch den $\mathfrak{R}'$ seines ersten Risses (nemlich a_1) kennen.

529. Sucht man den $\mathfrak{R}'$ eines Körpers nach den angegebenen Regeln auf, indem man zuerst den $\mathfrak{R}'$ des Theiles des Körpers, welcher ein Rechtseit ist (sollte ein solcher Theil nicht vorhanden sein, so fügen wir ein Rechtseit, etwa als Unterlage, dem Körper an) beliebig annimmt und dann den $\mathfrak{R}'$ eines beliebigen Punktes mittelst der R' seines Koordinaten (x, y, z) sucht, so nennt man diesen $\mathfrak{R}'$ die Parallelperspektive des Körpers. Um also die Parallelperspektive eines Körpers zu finden, beginnen wir mit der Annahme der Perspektive des Rechtseits und suchen die $\mathfrak{R}'$ der übrigen Punkte wie a' in der vorigen Nummer.

530. Will man aus dem $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ (Fig. 202a) und dem $\mathfrak{R}'$ Fig. 202. (Fig. 202b) eines Rechtseits die Richtung der zur Aufsuchung des $\mathfrak{R}'$ anzunehmenden Stralen finden, so kann dies folgendermassen leicht geschehen. Der Punkt o' (Fig. a) ist zugleich

der $\mathcal{R}'$ eines Punktes der unteren Fläche, dessen Koordinaten (x', y') aus Figur b hervorgehen. Sucht man daraus x und y und trägt diese nach Fig. a, so erhält man einen Punkt a (Fig. a), der mit o denselben $\mathcal{R}'$ hat und ist demnach oa die Stralenrichtung für Übersicht. In ähnlicher Art finden wir diese Richtung für Untersicht.

§ 37.

Arten von Parallel-Perspektiven.

531. Wir haben gesehen, dass man die Perspektive eines Parallelepipeds beliebig annehmen kann. Man darf also

1) die Winkel, welche X' und Y' mit Z'

2) die Verhältnisse $\frac{X'}{X}$, $\frac{Y'}{Y}$, $\frac{Z'}{Z}$

beliebig annehmen.

Was nun den letzteren Punkt betrifft, so ist klar, dass es am vortheilhaftesten ist, wenn wir die drei Verhältnisse $= 1$ annehmen. Dann ist auch für jeden Punkt a sein $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ und wird dadurch die Aufsuchung von a' aus a_1 und a_2 (s. 527) ausserordentlich einfach, da wir keine vierten Proportionalen zu konstruieren brauchen. Wir werden daher von nun an stets die genannten Verhältnisse $= 1$ gesetzt voraussetzen.

Anm. Es kann sich treffen, dass diese einfache Einnahme der genannten Verhältnisszahlen auf Zeichnungen führt, die nicht schön aussehen, oder sonst wie nicht passend erscheinen, indem vielleicht Flächen sich decken, wodurch die Zeichnung unklar wird. Dies ist namentlich der Fall wenn man die Perspektiven von Kristallen, mit denen wir uns aber hier nicht abgeben, darstellen will. Dann nimmt man diese Verhältnisse anders an. Das Verfahren zur Aufsuchung von a' aus a_1 und a_2 ist aber auch dann (aus Nr. 527) bekannt und wird nur umständlicher, indem man x', y', z' aus x, y, z durch Konstruktion von Proportionalen finden muss.

Setzt man voraus, dass die Stralen durch welche man die $\mathcal{R}'$ der Punkte auf $\mathcal{Z}'$ findet, zu dieser Tafel senkrecht stehen, so nennt man eine solche Parallelperspektive axonometrische Projektion; man unterscheidet drei Fälle:

1) Die isometrische Projektion, wenn die $\mathfrak{T}'$ gegen X, Y und Z gleiche Neigungen hat;

2) die monodimetrische oder dymetrische Projektion wenn die $\mathfrak{T}'$ bloß zu zwei Axen gleich geneigt ist;

3) die anisometrische oder trimetrische Projektion, wenn die $\mathfrak{T}'$ gegen alle drei Axen ungleiche Neigung hat.

Wir werden aber in Folgendem, wie schon gesagt, stets nur solche Perspektiven darstellen, bei welchem $X' = \bar{X}$, $Y' = Y$, $Z' = Z$ genommen wird.

532. Legt man die Stralen zur Aufsuchung der Parallelperspektive eines Körpers so, dass sie mit den drei Koordinatenaxen X, Y, Z gleiche Winkel bildet und stellt die $\mathfrak{T}'$ senkrecht zu diesen Stralen, so bilden diese Axen auch mit der $\mathfrak{T}'$ gleiche Winkel und sind demnach die drei Verhältnisse $\frac{X'}{\bar{X}}$, $\frac{Y'}{Y}$, $\frac{Z'}{Z}$ einander gleich und zwar ist jedes dieser Verhältnisse $= V^{\frac{2}{3}}$. Denken wir uns demnach den Körper, welchen wir zur Aufsuchung des $\mathfrak{K}'$ benützen in einem $V^{\frac{3}{2}}$ mal grösseren Mafsstabe, als den darzustellenden Körper, angenommen, so werden alle mit den Koordinatenaxen parallele Gerade in der Perspektive ihre Längen behalten. Was aber die spitzen Winkel betrifft, welche die Axen X' und Y' mit Z' machen, so sind diese $= 60^\circ$. Nehmen wir daher die Axen in der Perspektive gleich den entsprechenden Axen selbst und die Winkel (an den Eckpunkten innerhalb der $\mathfrak{K}'$) von X', Y', Z' je gleich 120° so entsprechen diese Annahmen, wie oben gesagt, dem Falle, wo die $\mathfrak{T}'$ auf den Stralen senkrecht steht und die Stralen mit den Axen gleiche Winkel bilden. Man nennt diese Parallelperspektive die isometrische Projektion.

533. Denkt man die Risse ($\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$) des Parallelepipeds wie oben (Fig. 199 a) angenommen und betrachtet man die $\mathfrak{T}_2$ als $\mathfrak{T}'$, die Stralen aber so gerichtet, dass sie mit der $\mathfrak{T}_2$ Winkel von 45° bilden, so werden dadurch nicht bloß der $\mathfrak{K}'$ der Axen X und Z, sondern auch die $\mathfrak{K}'$ aller Linien, die in Ebenen $\parallel \mathfrak{T}'$ liegen, mit den Linien selbst parallel und gleich ausfallen. Es wird aber auch der $\mathfrak{K}'$ der Axe Y so lange werden, als die Axe selbst ist. Es sind also auch hier, wie wir es ja haben wollen, die $\mathfrak{K}'$ der Koordinatenaxen so lange als die ent-

sprechenden Axen selbst. Zugleich ist aber auch der Winkel von X' und $Z' = 90^\circ$, während man den spitzen Winkel von Y' und Z' beliebig wählen kann, aber gewöhnlich $= 45^\circ$ macht.

Diese Parallelperspektive führt den Namen Kavalierperspektive.

Ann. Obgleich man wohl selten eine Anwendung davon machen wird, wollen wir doch bemerken, dass wenn wir bei der Kavalierperspektive (wo also die $\mathfrak{T}_2$ als $\mathfrak{T}'$ angenommen wird und die Stralen unter 45° gegen $\mathfrak{T}_2$ stehen) eine Ebene annimmt die senkrecht $\mathfrak{T}_2$ ist und deren zweite Spur senkrecht zu den Stralen steht, jede in dieser Ebene liegende Figur zur Perspektive eine ihr kongruente Figur hat. Den Beweis hiefür zu finden sei dem Schüler überlassen.

534. Die beiden genannten besonderen Arten von Parallelperspektiven, nemlich die isometrische Projektion und die Kavalierperspektive sind die gewöhnlich vorkommenden und die wir auch zur Anwendung empfehlen wollen, da sie vor anderen Perspektiven gewisse Eigenschaften voraus haben, die für die Anwendung bequem sind.

Die isometrische Projektion bietet, wie wir sehen werden, unter Umständen dadurch Vortheile, dass für sie die Stralen auf der $\mathfrak{T}'$ senkrecht stehen; besonders angenehm ist sie aber aus folgenden Rücksichten. Die drei eine Ecke bildenden Seiten des Parallelepipeds, welche ursprünglich Rechtecke sind, gehen in der Perspektive gewöhnlich in Rhomboide über, werden also im $\mathfrak{R}'$ verzerrt. Diese Verzerrung eines in ein Rhomboid übergegangenen Rechteckes ist um so geringer, je grösser der spitze Winkel des Rhomboids ist. Bei der isometrischen Projektion nun ist für alle Seitenflächen des Rechtseits die Verzerrung gleich und für alle nicht gross da hier der genannte spitze Winkel $= 60^\circ$ ist. Dadurch erhält hier die Perspektive ein hübsches Ansehen und ist für jede Seitenfläche der Flächenraum der Perspektive nicht viel kleiner als er ursprünglich war.

Dagegen ist bei der Kavalierperspektive die Verzerrung der Flächen XY, ZY sehr bedeutend, wogegen allerdings die Fläche XZ gar keine Verzerrung zeigt. Aber es sieht eben nicht gut aus, dass diese drei Flächen so sehr verschiedene Ver-

zerrungen haben. Sehr vortheilhaft ist es aber bei dieser Perspektive, dass für die Fläche XZ Alles in der Perspektive gerade so aussieht, wie in der Fläche selbst, was namentlich vortheilhaft ist, wenn in einer solchen Fläche Curven, besonders Kreise, vorkommen, da die Perspektiven der letzteren wieder Kreise sind.

Wir werden daher in der Anwendung für gewöhnlich einer der beiden letztgenannten Perspektiven meistens aber der isometrischen Projektion (deren Vorzüge in den folgenden Aufgaben noch besonders hervortreten werden) uns bedienen; nur wenn wir in einem besonderen Falle wahrnehmen, dass die perspektivischen Bilder, welche uns diese beiden Perspektiven liefern, unschön oder unvortheilhaft sind, werden wir die Winkel $X'Z'$ und $Y'Z'$ anders und zwar so wählen, dass das Bild besser ausfällt. Ja wenn auch dadurch dem Uebel nicht abgeholfen werden kann, werden wir versuchen durch passende Annahmen der Verhältnisse $\frac{X'}{X}$, $\frac{Y'}{Y}$, $\frac{Z'}{Z}$ zu einem guten Ziele zu gelangen.

Aber es ist in diesem Falle vortheilhafter keine axonometrische Projektion (s. 530 Anm.), bei welcher die Stralen auf der $\mathcal{Z}'$ senkrecht stehen und daher die Verhältnisszahlen von den Winkeln $X'Z'$, $Y'Z'$ abhängen, also das eine aus dem andern gesucht werden muss, vorauszusetzen, sondern diese Winkel und Verhältnisse nach Bedürfniss willkürlich zu wählen.

§ 35.

Parallelperspektivische Aufgaben.

535. Aufg. Es sind gegeben (Fig. 203a) ein Körper, der Fig. 203. besteht aus einem Rechtseit und einer Pyramide (deren Grundfläche auf der oberen Seitenfläche des Rechtseits steht), Fig. 203 zusammengesetzt ist; man soll die Perspektive (Fig. 203b) dieses Körpers finden.

Aufl. Wir zeichnen zunächst die Perspektive des Rechtseits (Fig. 203b)*) und suchen dann zuerst die Perspektive

*) Der Allgemeinheit wegen, haben wir die Winkel $X'Z'$ u. $Y'Z'$ beliebig angenommen; der Schüler kann dieselben so wählen, dass er entweder eine isometrische Projektion oder eine Kavalierperspektive erhält.

(a', b', c') der Eckpunkte a, b, c der Grundfläche unserer Pyramide. Da diese Punkte auf der oberen Fläche des Rechtseits liegen, so werden sie sichtbar, wenn wir, wie es in unserer Zeichnung geschehen ist, Übersicht wählen. Dann betrachten wir zugleich die obere Fläche als $\mathfrak{T}_1$. Demnach liegen a, b, c in der $\mathfrak{T}_1$ und sind deren z Koordinaten $= 0$. Tragen wir daher, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, die Koordinaten x, y (Fig. a) des Punktes a nach x', y' (Fig. b) so erhalten wir a' und in ähnlicher Art finden wir b', c' und d'_1 , woraus wir (durch Uebertragung der z Koordinate des Punktes d nach der Perspektivzeichnung (Fig. b) die Perspektive d' erhalten.

Wäre blos die Perspektive (Fig. b) unseres Körpers gegeben ohne Buchstaben und ohne erläuternden Text und sollten wir aus ihr die Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, Fig. a) finden, so wäre das eigentlich nicht möglich, da wir ja blos einen Riss (nemlich den $\mathfrak{R}'$) des Körpers haben und durch einen Riss sich ein Gebilde nicht bestimmen lässt. Allein wir dürfen erstens voraussetzen, dass der eine Theil der Perspektive den $\mathfrak{R}'$ eines Rechtseits vorstellt; dann können wir aus dem $\mathfrak{R}'$ (Fig. b) die Risse (Fig. a) ohne weiteres zeichnen. Wir setzen zweitens voraus, dass die Punkte a, b, c in der oberen Fläche des Rechtseits liegen; denn unter der oberen Fläche können sie nicht liegen, da sich dort die Materie des Rechtseits befindet; und oberhalb dieser Fläche auch nicht, weil sonst die Pyramide, (die doch ein materieller, also auch schwerer Körper ist) keine Stütze hatte. Liegen aber a, b, c in der oberen Fläche (die wir als $\mathfrak{T}_1$ ansehen) so ist es leicht, wie aus der Zeichnung ersichtlich, aus a', b', c' die ersten Risse (a_1, b_1, c_1) zu finden. Darf man endlich (für den Fall die Buchstaben in Fig. b weggelöscht sind) annehmen, dass das untere Ende des aus d' gezogenen Kantenlothes d'_1 ist, so lässt sich auf bekannte Art auch d_1 und d_2 finden.

Anm. Der Schüler versuche dieselbe Aufgabe für den Fall zu lösen, dass die Grundfläche der Pyramide auf der unteren Fläche des Rechtseits liegt und ihre Spitze unterhalb der Grundfläche. Für diesen Fall wird man Untersicht nehmen und die untere Fläche des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$ ansehen.

Fig. 204. 536. Aufg. Von einem Kreise A , der in einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene liegt, die Perspektive zu suchen.

Aufl. Wir setzen hier, wie immer voraus, dass ausser dem gegebenen Gebilde, also hier ausser dem Kreise noch ein Rechtseit gegeben ist, etwa so, dass auf einer Seite dieses Körpers der Kreis liegt. In diesem Falle nun würde sich besonders empfehlen, die Kavalierperspektive anzuwenden, da hier die Perspektive des Kreises wieder ein Kreis ist, der mit dem gegebenen gleichen Halbmesser hat. Man brauchte dann bloss die Perspektive des Mittelpunktes zu suchen.

Ist aber die Kavalierperspektive nicht zulässig, sondern ist die isometrische Projektion (oder eine andere Parallelperspektive) angewendet und sucht man den $\mathcal{K}'$ des Kreises A (dieser $\mathcal{K}'$ ist bekanntlich eine Ellipse), so nehme man ein in den Kreis eingeschriebenes Quadrat, dessen Seiten mit X, Z beziehungsweise parallel sind, zu Hilfe. Sucht man nemlich die Perspektive dieses Quadrats (in bekannter Weise, wie aus der Zeichnung (Fig. 204) zu ersehen) und zeichnet die Perspektiven seiner Diagonalen, so sind dies offenbar die Axen der Ellipse, welche den $\mathcal{K}'$ des Kreises vorstellt.

Anm. Ist, wie in unserer Figur (204b) die isometrische Projektion A' des Kreises gezeichnet und bezeichnet man den Halbmesser des Kreises A mit r , so ist, da die Seite des eingeschriebenen Quadrates $= r\sqrt{2}$, die kleine Axe der Ellipse $A' = r\sqrt{2}$ und die grosse Axe $= 2r\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ferner bilden die Seiten des eingeschriebenen Quadrats in der isometrischen Projektion mit der grossen Axe von A' Winkel von 30° . Läge der Kreis A (statt auf der Ebene XZ) auf der Ebene XY oder YZ, so würde seine isometrische Projektion dieselbe Gestalt wie A' haben (der Schüler wolle diese beiden Fälle durchführen). Endlich haben wir noch zu bemerken, dass man die Ellipse A' (also die isometrische Projektion eines Kreises auf XY, YZ, oder XZ) sehr leicht als Korbboogen darstellen kann. Trägt man nemlich von der Mitte a' von A' auf die grosse Axe $\overline{a'b'}$ gleich der kleinen Halbaxe und auf die kleine Axe $\overline{a'c'}$ gleich der grossen Halbaxe, so sind b' und c' die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen, welche sich auf der Geraden $c'b'$ in einem Punkte d' berühren und einen Quadranten des Korbboogens bilden, der die Ellipse vorstellen soll. Denn macht man $\overline{b'd'} = \overline{b'e'}$ (Fig. 204b), so ist, (wenn man die Halbaxen

der Ellipse A' mit α, β bezeichnet) weil $\overline{a'c'} = \alpha$ und $\overline{a'b'} = \beta$ gemacht ist, $\overline{b'e'} = \alpha - \beta$, $\overline{b'c'} = \overline{e'f'} = 2\beta$, also $\overline{c'd'} = \alpha + \beta$; da aber auch $\overline{c'f'} = \alpha + \beta$ ist, so folgt, dass, wenn $\overline{b'e'} = \overline{b'd'}$ auch $\overline{c'd'} = \overline{c'f'}$.

537. Liegt in einer der Seitenflächen (z. B. in der XZ) eines Rechtseits eine beliebige Curve A und soll man deren Perspektive A' suchen, so darf man nur die Perspektiven von vielen nicht zu weit von einander liegenden Punkten suchen und dieselben durch eine Curve (A') verbinden. Will man in einem Punkt (a') von A' die Tangente finden, so konstruiert man die Tangente an A im Punkte a und sucht die Perspektive dieser Tangente (indem man von einem beliebigen Punkte b der Tangente die Perspektive b' sucht und a' mit b' verbindet).

Ist die Curve A zweiter Ordnung, z. B. eine Ellipse, so kann man in ihr zwei konjugirte Durchmesser annehmen, deren Perspektiven (die wieder konjugirte Durchmesser der Perspektive vorstellen) suchen, und daraus die Axen der Perspektive der Ellipse bestimmen.

Fig. 205. 538. Aufg. Die Parallelperspektive einer Curve A zu finden, die in einer zu einer Tafel (z. B. zur $\mathfrak{T}_1$) senkrechten Ebene liegt (deren erster Riss also eine Gerade ist).

Aufl. Im Allgemeinen nimmt man auf der Curve so viele Punkte an, als man zur Verzeichnung derselben nöthig zu haben glaubt und behandelt jeden Punkt a so, wie oben (527) angegeben, dass man den $\mathfrak{R}'$ seines ersten Risses, nemlich a'_1 und daraus mittelst seiner z Koordinate a' sucht. Liegen dann, wie in unserm Beispiele, alle ersten Risse der Curvenpunkte in einer Geraden, so gilt dies auch für die Perspektiven dieser ersten Risse.

Ist aber, wie in unserer Zeichnung (Fig. 205 a) der $\mathfrak{R}_2$ der Curve ein Kreis (die Curve A selbst also eine Ellipse), so nimmt man die Axen X, Y, Z wie in unserer Zeichnung so an, dass der Ursprung o in den Mittelpunkt von A fällt und sucht auf schon bekannte und in der Zeichnung deutlich angedeutete Art die $\mathfrak{R}'$ (a', b', c', d') der Scheitel (a, b, c, d) der Ellipse A , wodurch man von dem $\mathfrak{R}'$ unserer Ellipse, der eine Ellipse A' (Fig. 205 b) wird, zwei konjugirte Durchmesser erhält und diese Ellipse konstruirt werden kann. — Man wird leicht sehen, dass,

wenn (wie in unserer Zeichnung) das x und y des Punktes a einander gleich sind und die Perspektive eine isometrische Projektion ist, die Perspektiven a', b', c', d' die Scheitel von A' werden. Ferner, dass dann das Axenverhältniss der Ellipse A' dasselbe ist, wie das oben (536. Anm.) angegebene, und demnach auch diese Ellipse sich in ähnlicher Art wie oben, als Korbogen darstellen lässt.

Anm. Wäre A_2 (statt eines Kreises) eine Curve zweiter Ordnung, deren Axen irgendwie liegen, so würde man auf der Curve die beiden Axen, oder eine Axe und eine dazu konjugirte Sehne annehmen, deren Perspektiven suchen und wieder zwei konjugirte Durchmesser oder einen Durchmesser und eine dazu konjugirte Sehne erhalten.

539. Aufg. Die isometrische Projektion A' (Fig. 206 b) Fig. 206. einer Schraubenlinie A zu finden, deren Axe auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Fig. 206 a).

Aufl. Nachdem wir in der vorigen Nummer schon angegeben haben, wie man überhaupt die Parallelperspektiven von Curven findet, wird es genügen, wenn wir die isometrische Projektion A' eines halben Ganges unserer Schraubenlinie zeichnen und es dem Schüler überlassen, die Konstruktion dieser Perspektive selbst zu finden. Zugleich möge er auch versuchen in einem Punkte (a') von A' die Tangente dadurch zu finden, dass er in dem entsprechenden Punkte (Fig. 206 a) die Tangente konstruirt (s. 226) und die isometrische Projektion dieser Tangente aufsucht.

540. Hat man die Perspektive eines Cylinders zu suchen, so sucht man die Perspektiven der Grundflächen und die einer geraden Erzeugenden, so kann man die verlangte Perspektive zeichnen. Wir wollen hierüber zunächst folgendes Beispiel machen.

Aufg. Von einer Konsole deren geraden Erzeugenden Fig. 186. parallel zu X laufen, sind gegeben (Fig. 207 a) die Risse ($\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$); man sucht ihre Perspektive.

Aufl. Es wird genügen, wenn wir (in Fig. 207 b die Obersicht, in Fig. 207 c die Untersicht) die Perspektiven, beispielsweise die Kavalierperspektiven, darstellen und die Konstruktion dem Schüler überlassen.

Anm. Hat man die Perspektive eines Kegels zu finden, so sucht man natürlich die Perspektive A' seiner Grundlinie (A) und die a' seiner Spitze (a), und zieht von a' Tangenten an A' (und wenn A' begrenzt, noch von a' Gerade nach den Endpunkten von A').

Fig. 208.

541. Denkt man sich in einer Vertikalebene, die mit der $\mathfrak{T}_2$ einen Winkel von 45° (Gehrungswinkel nennt man den Winkel von 45° in der Praxis) bildet, irgend eine Figur (Gehrungslinie) und betrachtet diese als Schneidlinie eines Cylinders der $\parallel X$ ist und zugleich als Schneidlinie eines Cylinders $\parallel Y$, so haben wir zwei gleichgestaltete Cylinder, die, wie man sagt, auf Gehrung zusammengefügt sind. Der zweite Riss der Gehrungslinie ist dann zugleich der zweite Riss des Cylinders $\parallel Y$ (denn dieser Cylinder steht ja senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$) und da beide Cylinder gleiche Gestalt haben, so gibt der R_2 der Gehrungslinie das Profil beider Cylinder an. Da die Gehrungslinie eine Curve ist, wie wir sie oben (538) behandelt haben, so wird der Schüler im Stande sein, die $\mathfrak{K}'$ von solchen auf Gehrung zusammenstossenden Cylindern zu suchen. Wir geben (Fig. 208 a) den Aufriss und den (von unten nach oben gesehenen) Grundriss eines Körpers, der (wie man wohl erkennen wird) aus einem Rechtseit besteht, das vier auf Gehrung zusammengefügte Cylinder bedeckt. Wie man hieraus den $\mathfrak{K}'$ (in unserer Zeichnung die isometrische Projektion) findet und warum hier die $\mathfrak{K}'$ zweier Gehrungslinien Gerade werden, wollen wir dem Schüler zu untersuchen überlassen.

542. Sucht man die Parallelperspektive einer Kugel, so findet sich, dass dieser $\mathfrak{K}'$ im Allgemeinen eine Ellipse ist. Stehen jedoch, wie bei der isometrischen Projektion, die Stralen senkrecht zur $\mathfrak{T}'$, so ist der $\mathfrak{K}'$ der Kugel ein Kreis. Aber nicht etwa ein Kreis vom Halbmesser der Kugel; denn wir haben ja oben (532) gesehen, dass wir, um die isometrische Projektion eines Körpers zu erhalten, seinen Mafsstab $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösser nehmen müssen. Haben wir daher den $\mathfrak{K}'$ des Kugelmittelpunktes gefunden, so beschreiben wir aus ihm mit einem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösseren Halbmesser, als des der Kugel, einen Kreis, so ist das der gesuchte $\mathfrak{K}'$.

Ist $\overline{ab}$ (Fig. 209) der Halbmesser der Kugel, $\angle b = 60^\circ$, $\angle d = 45^\circ$ und $ac \perp bd$, so ist $\overline{ad}$ der verlangte Halbmesser des Kreises.

Man sieht also hier einen grossen Vorthail den die axonometrische Projektion gewährt und der noch in anderen Fällen zur Geltung kommt, wie folgende Nummer zeigt.

543. Aufg. Die isometrische Projektion (Fig. 210) eines Wulstes zu finden, dessen Mittellinie in einer horizontalen Ebene liegt. Fig. 212.

Aufl. Man sucht zuerst die isometrische Projektion A' der Mittellinie des Wulstes (s. 536); denkt man sich nun den Wulst als Umhüllungsfläche einer Kugel und demnach mit einem Halbmesser α , der $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal grösser ist, als der Halbmesser der erzeugenden Kugel, aus allen Punkten von A' Kreise beschrieben, so ist die Umhüllung dieser Kreise der verlangte $\mathcal{K}'$. Demnach darf man, um diesen zu finden, nur Parallele B', C' (Fig. 210) zu A' zeichnen [hier hat die innere Parallele vier Grate (Rückkehrpunkte), die von A' um $\sqrt{\frac{3}{2}}$ mal den Kugelhalbmesser entfernt sind], so hat man das Gesuchte.

Anm. In ähnlicher Art kann man bei allen Röhrenflächen, z. B. bei einer Serpentine verfahren. Der Schüler mag sich daran versuchen.

544. Die Parallelperspektive einer beliebigen Drehfläche zu finden, die von zwei Parallelkreisen A, B , welche gleichweit vom Aequator C abstehen, begrenzt und, wie in unserer Zeichnung, nur wenig ausgebaucht ist. Fig. 211.

Aufl. Wir suchen die Perspektiven (A', B') der begrenzenden Parallelkreise und dann noch die Perspektive C' des Aequators und legen an A', B', C' berührende Curven, so erhalten wir die verlangte Perspektive.

Ist, wie in unserer Zeichnung, die Perspektive eine isometrische Projektion, so braucht man von C' nur die Punkte $a' b'$ (also die Hauptscheitel von C') zu zeichnen.

Anm. Dieses Verfahren passt für alle Parallelperspektiven und zeigt wie man überhaupt bei diesen Zeichnungen verfahren kann, um die Perspektiven von Drehungsflächen zu erhalten.

Wenn, wie hier die Ausbauchung gering ist, so genügen die drei Parallelkreise; wenn nicht, so muss man noch weitere Parallelkreise einschalten.

§ 39.

Schattenkonstruktion an Parallelperspektiven.

545. Wie wir schon gesehen haben, wird ein Körper durch seine Perspektive nicht bestimmt, sondern ist es nothwendig, dass man von jedem Punkte ausser seiner Perspektive auch die seines ersten Risses kennt (s. 535). Sind nun viele Punkte vorhanden und keine Buchstaben an denselben geschrieben (wie dies ja praktisch stets der Fall ist), so wird selbst, wenn die Perspektiven der ersten Risse gezeichnet sind, die Zeichnung undeutlich. Dann lässt sich, wie man sehen wird, dadurch abhelfen, dass man Schattenkonstruktionen an den Perspektiven ausführt.

Man kann die Perspektiven der Schattengrenzen dadurch finden, dass man in den Rissen ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) die Schattengrenzen (nach 6. Abschnitt) konstruiert und dann daraus die Perspektiven derselben sucht. Es gibt aber in vielen Fällen einfachere Mittel zur Aufsuchung der Schattengrenzen.

546. Behalten wir die gebräuchliche Richtung der Lichtstrahlen bei und suchen wir die Perspektive A' eines Lichtstrales A und die A'_1 seines ersten Risses A_1 , so können wir dadurch leicht den Schlagschatten, den ein gegebener Punkt a auf die $\mathfrak{T}_1$ wirft aufsuchen. Denn dieser Schlagschatten kann offenbar dadurch gefunden werden, dass man durch den Punkt a einen Lichtstral A und durch a_1 den ersten Riss (A_1) des Lichtstrales legt und zusieht von A und A_1 sich schneiden. Hat man daher von einem Punkte a seine Perspektive (a') und die seines ersten Risses, nemlich a'_1 , und legt man A' durch a' und A'_1 durch a'_1 so ist der Schnitt von A' und A'_1 die Perspektive des Schlagschattens von a auf $\mathfrak{T}_1$. Wir können also diese Schattenkonstruktion gleich an der Perspektive ausführen. Wie sich diese Konstruktion gestaltet, wird folgendes Beispiel zeigen.

Fig. 212.

547. Aufg. Es sei (Fig. 212a) ein Rechtseit durch seine Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) gegeben und sei (Fig. 212b) seine nach der früher gegebenen Anleitung aufgesuchte Perspektive. Man sucht von

einem durch seine Risse (A_1, A_2) gegebenen Lichtstral die Perspektive, sowie die seines ersten Risses.

Aufl. Da wir hier Übersicht angenommen haben, so betrachten wir die obere Seite des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$. Suchen wir nun die $\mathfrak{R}$ der Punkte a_1, b_1 (in welchen A_1 die X und Y schneidet, so erhalten wir A'_1 ; suchen wir noch a' mit Hilfe seiner z Koordinate) und ziehen $a'b'_1$ (b' fällt hier offenbar mit b'_1 zusammen) so haben wir A' .

Anm. Für die isometrische Projektion und Übersicht wird A'_1 parallel zum unteren Rande des Blattes, A' aber parallel zu X' .

548. Aufg. Ein aus einem Rechtseit und einer darauf Fig. 213. stehenden abgestumpften Pyramide bestehender Körper ist durch seine Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) gegeben und sein $\mathfrak{R}$ (Fig. b) auf bekannte Art gesucht; man soll seine Schatten konstruieren.

Aufl. Wir haben hier Übersicht und betrachten daher die obere Fläche des Rechtseits als $\mathfrak{T}_1$; demnach fallen die Eckpunkte der unteren Pyramiden-Grundfläche mit ihren Schlagschatten (auf $\mathfrak{T}_1$) zusammen. Will man von einem Punkte der oberen Grundfläche der Pyramide, z. B. von a , den auf $\mathfrak{T}_1$ fallenden Schlagschatten gleich in der Perspektive finden, so legt man durch a' die Perspektive A' eines Lichtstrals und A'_1 durch a'_1 ; wo A' und A'_1 sich schneiden das ist der verlangte Schlagschatten. Sucht man so alle Schlagschatten der oberen Punkte, so erhält man den Schlagschatten der Pyramide auf $\mathfrak{T}_1$ und weiss zugleich welche Flächen derselben beschattet sind. (Wir haben alle beschatteten Flächen schraffirt).

Hat man so die Schatten angedeutet und löscht man jetzt alle Buchstaben in der Perspektive, aber auch alle Perspektiven von ersten Rissen, wie a'_1 weg und behält blos die Perspektiven aller Ecken und Linien, nebst den Schatten, so kann man dennoch Fig. a (wir verstehen unter Fig. a, die wir in unserer Zeichnung weggelassen haben, die Risse ($\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$) unseres Körpers) aus Fig. b finden. Denn man sieht zunächst aus dem Schlagschatten, dass die unteren Punkte der Pyramide auf der oberen Fläche des Rechtseits liegen, da diese Punkte mit ihren Schlagschatten zusammenfallen. Man kann ferner auf die in der Figur angegebene Art die Perspektive s' der Pyramiden spitze und die s' ihres Schlagschattens finden. Zieht man nun

durch s' die Perspektive des ersten Lichtstrales (d. h. eine mit A'_1 , dessen Richtung man kennt, parallele Linie), so liegt in dieser Linie s'_1 . Dadurch ist man aber im Stande die Perspektiven der ersten Risse aller Mantelkanten und mit diesen aller oberen Eckpunkte der Pyramide zu finden. Wie man aber von jedem Punkte, von welchem die Perspektive und die seines ersten Risses bekannt ist, die Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) findet, haben wir früher (528.) gezeigt. (Der Schüler wolle die Aufsuchung der Risse unseres Körpers versuchen). Man sieht also in der That, dass hier die Perspektive allein in Verbindung mit der Schattenkonstruktion zur Bestimmung des Körpers genügt.

Fig. 214. 549. Aufg. Auf einem Rechtseit steht ein Kreiskegel mit kreisförmiger Grundfläche; man sucht seine Perspektive und die Schatten in derselben.

Aufl. Wir überlassen diese Aufgabe dem Schüler und geben zu seiner Unterstützung (in Fig. 214) das Resultat an (in welcher Figur A', A'_1 die Perspektive des durch die Kegelspitze s gehenden Lichtstrales und seines ersten Risses bedeuten). In ähnlicher Art versuche der Schüler dieselbe Aufgabe, nur dass statt des Kegels ein von zwei Parallelkreisen begrenzter Kreiscylinder gegeben ist.

Fig. 215. 550. In unseren bisherigen Beispielen haben wir, um die Schattenkonstruktion gleich in der Perspektive auszuführen, nicht bloß die Richtung der Perspektive (A') des Lichtstrales selbst, sondern auch die (A'_1) seines ersten Risses (547.) aufgesucht. Wir wollen jetzt ein Beispiel geben, in welchem man (statt A'_1) A'_3 , nemlich die Perspektive des dritten Risses des Lichtstrales (auf einer $\mathfrak{Z}_3$, die parallel ist zur YZ Ebene) aufsucht, und zu dem Ende eine Konsole (s. 517 und 540) als Beispiel wählen (Fig. 215).

Da wir schon früher (540.) gezeigt haben, wie man aus den Rissen ($\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$) die Perspektive einer Konsole findet, so haben wir hier (Fig. 215) gleich die Perspektive (und zwar die isometrische Projektion mit Untersicht) angenommen und zeigen nur, wie man in dieser die Schattenkonstruktion ausführt, wobei wir uns auf die oben (517.) ausgeführte Schattenkonstruktion stützen.

Nach Anleitung der Nr. 544, in welcher gezeigt wurde, wie man für Obersicht A' und A'_1 des Lichtstrales A findet, kann man eben so gut für Untersicht A' und A'_3 erhalten. Macht man (Fig. 215) $\overline{a'b'} = \overline{a'c'}$ so ist $b'c' \parallel A'_3$; sucht man noch A' , so wird man für isometrische Projektion mit Untersicht finden, dass $A' \parallel Z'$ wird.

Zieht man nun $\parallel b'c'$ eine Tangente an das Profil $e'd'f'$, welche dieses in d' berührt, so ist d' ein Punkt der Schlagschattengrenze $d'g'$. Legt man durch e' eine Gerade $e'f' \parallel b'c'$ so geht durch f' die Erzeugende unseres Cylinders auf welcher der Schlagschatten (g') des Punktes e' liegt. Zieht man daher durch e' noch eine Parallele (A') zu Z' (welche den $\Re'$ des durch e' gehenden Lichtstrales vorstellt) so schneidet sie B' in g' . Nimmt man zwischen d' und e' einen Punkt auf dem Bogen $d'e'$ an, so findet man in ähnlicher Art seinen Schlagschatten auf Bogen $d'g'$. Zieht man $\parallel b'c'$ an dem Profil unseres Cylinders eine Tangente, die nach h' berührt, so erhalten wir die Schattenlinie des Cylinders; ferner in ähnlicher Art wie oben den Schlagschatten des Bogens $h'i'$.

551. Hat man an Parallelperspektiven Schattenkonstruktionen zu machen, die sich nicht unmittelbar in der Perspektive finden lassen, so muss man nach den früher (6. Abschnitt) gegebenen Regeln die Schattengrenzen an den Rissen ($\Re_1, \Re_2$) konstruieren, und die $\Re'$ derselben suchen.

Achter Abschnitt.

Central - Perspektive.

§ 40.

Allgemeine Erklärungen.

552. Alle bisher aufgeführten graphischen Darstellungsarten, sowohl die gewöhnlichen Risse ($\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$) als auch die Parallelperspektiven können dazu dienen, Körper graphisch zu bestimmen; sie werden aber niemals (wie sich in Folgendem herausstellen wird) dazu dienen können, auf unser Auge, wenn es die Zeichnungen betrachtet, den Eindruck zu machen, den der Gegenstand selbst auf es zu machen im Stande ist. Es gibt aber viele Fälle, in denen man mit Hilfe einer Zeichnung dem Auge zeigen will, wie ihm der zu verfertigende Körper von einem gewissen Standpunkte aus erscheinen wird; so dass es schon im Voraus (vor Anfertigung des dargestellten Gegenstandes) beurtheilen kann, ob ihm der Anblick gefällt oder nicht. Wie man solche Zeichnungen erhält, soll hier untersucht werden.

553. Jeder leuchtende Punkt sendet einem ihn betrachtenden menschlichen Auge einen Strahlenkegel zu, dessen Spitze der leuchtende Punkt, und dessen Basis das Schwarze im Auge (die Oeffnung in der Iris) ist. Diese Strahlen aber werden im Innern des Auges wieder zu einem Punkte auf der Netzhaut, der in der Axe des genannten Strahlenkegels liegt, vereinigt, so dass die Wirkung auf die Netzhaut dieselbe ist, als wenn die Oeffnung in der Iris nur ein Punkt wäre (der mit dem Mittelpunkt der Oeffnung zusammenfällt und den wir schlechtweg das Auge heissen wollen), und der leuchtende Punkt nur einen einzigen Stral dem Auge zuführte. Wir wollen daher sagen:

Jeder leuchtende Punkt führt dem Auge (das wir durch einen an bestimmter Stelle befindlichen Punkt, der eigent-

lich den Mittelpunkt der Irisöffnung vorstellt, repräsentiren) einen Lichtstral zu, der die Netzhaut in einem bestimmten Punkte trifft.

Dieses Auftreffen des Strales auf die Netzhaut sagt uns, dass auf der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Auge (d. h. dem Mittelpunkte der Irisöffnung) ein leuchtender Punkt sein müsse, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, in Folge des Auftreffens des Strales auf die Netzhaut sehen wir den leuchtenden Punkt, und zwar in der Verbindungslinie des getroffenen Punktes (in der Netzhaut) mit dem Auge. Wo aber der leuchtende Punkt in dieser Verbindungslinie liegt, das empfindet das Auge zunächst nicht. Wenn wir also von dem Eindruck den der leuchtende Punkt auf das Auge (durch den ihm zugesendeten Stral) macht nur in so weit Notiz nehmen, als dadurch das Auge einen Punkt in einer bestimmten Geraden sieht, so können wir sagen, wenn man von einem leuchtenden Punkte nach dem (als Punkt an gewisser Stelle aufgefassten) Auge einen Stral zieht, so machen alle Punkte dieses Strales denselben Eindruck auf das Auge, wie der leuchtende Punkt selbst.

554. Haben wir daher eine (eigenes oder reflektirtes) Licht ausstralende Curve, von welcher also jeder Punkt dem (an einer bestimmten Stelle aufgestellten und dem Körper zugekehrten) Auge einen Stral zusendet, so dass diese Stralen im Allgemeinen einen Stralenkegel bilden, und schneiden wir diesen Kegel durch eine Ebene (Tafel), auf welcher wir den Schnitt mit dem Kegel zeichnen, so fallen von dieser Zeichnung aus dieselben Stralen in's Auge wie von der Linie selbst. Es macht also diese Zeichnung, von der Stelle aus gesehen, an welcher sich das Auge befindet, denselben Eindruck auf das Auge, wie die leuchtende Linie selbst.

Da aber diese Zeichnung nichts anderes ist, als der Centralriss (Centralprojektion) der gegebenen Linie auf eine Tafel für ein bestimmtes Centrum (an welches wir bei Betrachtung der Zeichnung das Auge setzen müssen, um von ihr denselben Eindruck zu empfangen, den die Linie selbst machen würde), und da das was wir in Bezug auf eine Linie gesagt haben in gleicher Art auch für Flächen gilt, so sehen wir:

Will man von einem darzustellenden Körper auf einer Tafel eine Zeichnung entwerfen, die auf ein Auge von einem bestimmten Punkte aus betrachtet denselben Eindruck, wie der Gegenstand selbst macht, so betrachtet man den Punkt als Centrum eines Stralensystems, und zeichnet den Centralriss des Gegenstandes auf einer Tafel, die zwischen dem Centrum und dem Gegenstande angenommen wird. Diesen Centralriss nennt man dann die **Perspektive**, oder **Centralperspektive** des Gegenstandes.

555. Wie wir eben gesehen haben, ist die Centralperspektive eines Körpers nichts weiter als ein Centralriss, den wir dann Perspektive heissen, wenn wir beabsichtigen, die Zeichnung von dem Centrum aus anzusehen (um den Eindruck zu erfahren, den der dargestellte Körper selbst auf das Auge machen würde). Demnach aber müssen wir bei der Wahl des Centrums und der Tafel die beabsichtigte Beschauung der Zeichnung berücksichtigen. Dazu gehört vor Allem, dass wir die Tafel, wie es gewöhnlich vorausgesetzt wird, zwischen dem Auge und dem Gegenstande aufstellen, oder auch noch weiter von dem Auge entfernen, also immer so, dass das Auge gegen die Tafel und den Gegenstand gleichzeitig hinsieht. Es kann also für die Perspektive die Tafel nicht so gestellt werden, dass das Auge zwischen ihr und dem Gegenstande sich befindet.

556. Da wir ferner die ganze Zeichnung von dem Centrum aus auf einmal betrachten wollen, so muss die Entfernung des Auges von der Tafel gross sein im Verhältniss zu den Dimensionen der Perspektivzeichnung. Denken wir uns diese Zeichnung durch ein möglichst eng anschliessendes Rechteck umrahmt, so soll die Entfernung des Auges von der Tafel gleich ein bis anderthalbmals der grösseren Rechteckseite sein.

557. Da es bekannt ist, dass das Auge einen Gegenstand der ihm zu nahe liegt, nicht deutlich sieht, so darf die Entfernung des Auges von der Tafel nicht zu klein, etwa nicht kleiner als 30 Centimeter sein.

558. Wenn wir die in den letzten drei Nummern bezüglich der Wahl des Centrums und der Tafel aufgestellten Gesetze berücksichtigen, so fällt die Aufgabe, die Centralperspektive eines Körpers zu suchen, zusammen mit der Aufgabe, den Centralriss des Körpers zu finden. Wir wollen daher in dem Folgenden § zeigen, wie man diese Aufgabe löst.

§ 41.

Aufsuchung von Centralperspektiven.

559. Bei weitem die meisten Bilder, die Perspektiven von Körpern vorstellen, werden an vertikalen Wänden angebracht, so dass die Ebene der Zeichnung (Perspektivtafel, oder schlechtweg Tafel) vertikal ist. Wir wollen daher die Tafel als die verticale Tafel ($\mathfrak{T}_2$) betrachten, und alle Risse von Punkten und Linien in ihr mit dem Index 2 bezeichnen. Zur Bestimmung des Auges (Centrums), das wir stets mit o bezeichnen, geben wir seinen Riss (o_2) und seinen Abstand von der Tafel. Wir nennen von nun an diesen Abstand schlechtweg Distanz und den Riss (o_2) des Auges den Augpunkt. Um die Distanz zu bestimmen zeichnet man entweder aus o_2 mit der Distanz einen Kreis (Distanzkreis), oder man gibt sie in Zahlen nach einem bestimmten Maßstabe an, oder man zeichnet sie in wirklicher Grösse oder im verkleinerten Maßstabe auf. Man kann aber auch durch das Auge (o) eine horizontale Ebene legen, die man als erste Tafel ($\mathfrak{T}_1$) betrachtet, und welche die Tafel ($\mathfrak{T}_2$) nach einer Geraden schneidet, die man Horizont nennt und mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Klappt man die $\mathfrak{T}_1$ um $\mathfrak{H}$ in das Zeichnungsblatt, so kommt o nach einem Punkt o_1 so, dass $o_1 o_2 \perp \mathfrak{H}$ und $\overline{o_1 o_2} =$ der Distanz wird. Obgleich wir auf diese Art wieder zwei Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) erhalten, so werden wir doch meistens nur von der $\mathfrak{T}_2$, der Perspektivtafel Gebrauch machen, und sie daher, wie schon bemerkt schlechtweg Tafel nennen. Ebenso werden wir unter Riss, Spur stets den Riss oder die Spur auf der zweiten Tafel (der Perspektivtafel) verstehen.

560. Wenn wir nun zeigen wollen, wie man die Perspektiven von Körpern konstruirt, so werden wir begreiflicherweise

zuerst diese Aufgabe an einfachen Gebilden lösen. Hierbei machen wir von den früher (im ersten Bande, Nr. 75) gegebenen Gesetzen über Centralrisse Anwendung, von denen wir die wichtigsten hier wiederholen und noch weitere hinzufügen wollen. Wir werden aber Auge statt Centrum und Perspektive statt Centralriss sagen.

1) Jede durch das Auge gelegte Gerade heisst ein Stral.

2) Die Perspektive eines Strales ist ein Punkt, und zwar der, in welchem der Stral die Tafel trifft (die Spur des Strales). Steht der Stral senkrecht zur Tafel, so ist seine Perspektive der Augpunkt (o_2).

3) Die Perspektive eines Punktes ist die Spur des durch den Punkt gelegten Strales.

4) Nach einer unbegrenzten Geraden (die kein Stral ist) lassen sich unzählige Stralen führen, von denen einer mit der Geraden parallel ist, und der Hauptstral der Geraden heissen soll. Die Spur dieses Hauptstrals (welche also die Perspektive des unendlich fernen Punktes der Geraden ist) wird der Fluchtpunkt oder die Flucht der Geraden genannt.

5) Alle nach einer Geraden A gezogenen Stralen bilden eine Ebene, die Stralenebene der Geraden, welche die Tafel nach einer Geraden A' schneidet; A' heisst die Perspektive der Geraden A. Um also A' zu erhalten braucht man blos zwei Punkte davon zu finden. Wo möglich werden wir als solche Punkte die Spur (Schnitt mit der Tafel) und die Flucht von A suchen.

6) Die Hauptstralen von Parallellinien fallen zusammen, also auch ihre Fluchtpunkte. Wir haben also den Satz:

Die Perspektiven paralleler Geraden schneiden sich in einem Punkte, dem Fluchtpunkte.

7) Ist eine Gerade A mit der Tafel parallel, so hat sie keinen Fluchtpunkt. Dagegen ist ihre Perspektive A' parallel mit der Geraden A selbst. Da aber auch ihr Riss A_2 mit ihr parallel ist, so folgt der Satz:

Ist eine gerade A parallel zur Tafel, so ist A'
 $\parallel A_2$.

8) Jede Ebene, welche durch das Auge geht heisst Stralenebene; ihre Spur ist ihre Perspektive. Steht die Ebene noch senkrecht zur Tafel, so geht die Perspektive der Ebene durch o_2 .

9) Hat man eine beliebige Ebene $\mathfrak{A}$ und nimmt man in ihr eine Gerade A an, und sucht den Fluchtpunkt von dieser, so muss man durch o eine Parallele B zu A legen; thut man dasselbe für alle Geraden von $\mathfrak{A}$ so bilden die geraden B eine Ebene $\mathfrak{B}$, welche $\parallel \mathfrak{A}$ ist, und die Hauptstralenebene von $\mathfrak{A}$ heissen soll. Die Spur (Schnitt mit der Tafel) von $\mathfrak{B}$, welche offenbar alle Fluchtpunkte der Geraden der Ebene $\mathfrak{A}$ enthält, soll die Fluchtlinie oder die Flucht der Ebene $\mathfrak{A}$ heissen. Offenbar enthält die Spur von $\mathfrak{A}$ alle Spuren von Linien der Ebene $\mathfrak{A}$ und sind die Spur und die Flucht der Ebene $\mathfrak{A}$ einander parallel. Wir haben daher folgende Sätze:

- a) Um die Flucht einer Ebene $\mathfrak{A}$ zu erhalten legt man durch o eine Ebene (Hauptstralenebene) $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{A}$, so ist die Spur von $\mathfrak{B}$ die verlangte Flucht;
- b) Spur und Flucht einer Ebene sind parallel;
- c) liegt eine Gerade A in einer Ebene $\mathfrak{A}$, so liegen Spur und Flucht von A in Spur und Flucht von $\mathfrak{A}$.

10) Schneiden sich zwei Gerade, so liegen sie in einer Ebene, deren Spur die Spuren der beiden Geraden, und deren Flucht die Fluchten derselben enthält. Demnach hat man den Satz:

Wenn zwei Gerade sich schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Spuren parallel zu der ihrer Fluchten.

11) Ist eine Gerade A mit einer Ebene $\mathfrak{A}$ parallel, und sucht man die Flucht von A und $\mathfrak{A}$ (mittelst des Hauptstrals B von A , und der Hauptstralenebene $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$), so liegt B in $\mathfrak{B}$. Hieraus folgt:

Wenn eine Gerade A parallel einer Ebene $\mathfrak{A}$ ist, so liegt der Fluchtpunkt von A in der Fluchtlinie von $\mathfrak{A}$.

12) Die Fluchtlinien paralleler Ebenen fallen zusammen.

Fig. 216. 561. Wir bestimmen eine unbegrenzte Gerade A durch ihre Spur a und ihre Flucht a (Fig. 216); dann ist aa die Perspektive A'. (Wir setzen hier gleich fest, dass wir die Spur einer Geraden, so wie jeden in der Tafel liegenden Punkt eines gegebenen Gebildes mit einem kleinen lateinischen Buchstaben ohne Index bezeichnen; ferner, dass wir jeden Fluchtpunkt einer Geraden mit einem kleinen deutschen Buchstaben versehen; dann, dass wir die Gerade o_2a , welche durch den Augpunkt o_2 und den Fluchtpunkt der Geraden A geht, den Horizont von A nennen, und mit $\mathfrak{H}_A$ bezeichnen). Da aber der Hauptstral von A parallel zu A ist und durch o geht, so ist $o_2a \parallel A_2$; und weil A_2 durch die Spur a geht, so sieht man Folgendes:

- 1) Ist a die Spur und a die Flucht einer Geraden A, so ist aa die Perspektive A' der Geraden, und die durch a zu o_2a gezogene Parallele A_2 der Riss der Geraden.
- 2) Der Winkel der Geraden A mit der Tafel ist gleich dem Winkel ihres Hauptstrales oa mit o_2a , also gleich dem Winkel oao_2 eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich der Distanz und dessen andere Kathete $= \overline{o_2a}$ ist.

Anm. Man sieht zugleich, dass die in unserer Zeichnung erkennbaren Beziehungen zwischen Spur, Flucht, Riss und Perspektive unabhängig sind von der Distanz die wir zunächst nicht gegeben haben, während von ihr der Winkel der Geraden mit der Tafel abhängt, und zu dessen Aufsuchung also die Distanz gegeben sein müsste.

Fig. 217. 562. Aufg. Auf eine durch Spur a und Flucht a gegebene Gerade A soll von a aus eine Strecke $\overline{ab}$ aufgetragen, und die Perspektive b' des Punktes b gesucht werden.

Aufl. Wir denken uns durch b eine zweite Gerade (B) gelegt, und suchen die Perspektive B' dieser Geraden, so ist der Schnitt von B' mit A' die gesuchte Perspektive b'. Um nun b' leicht zu finden wählen wir B möglichst bequem, nemlich so, dass die Spur von B, die wir mit b_α bezeichnen wollen, von

a so weit entfernt ist, als $\overline{ab}$ lang ist, d. h. wir machen $\overline{ab}_\alpha = \overline{ab}$. Suchen wir nun die Flucht von B , indem wir durch o eine Parallele zu B (dessen Hauptstral) legen, und den Punkt α suchen, in welchem dieser Hauptstral die Tafel trifft, so ist bb_α die Gerade B und $o\alpha$ deren Hauptstral, demnach ist

- 1) $bb_\alpha \parallel o\alpha$; es ist aber auch
- 2) $ab \parallel oa$, weil oa , der Hauptstral von ab , also auch
- 3) Ebene $(abb_\alpha) \parallel$ Ebene $(o\alpha\alpha)$, demnach auch
- 4) $ab_\alpha \parallel a\alpha$ und
- 5) $\triangle abb_\alpha \sim \triangle o\alpha\alpha$, folglich auch
- 6) $a\alpha = oa$, da auch $\overline{ab}_\alpha = \overline{ab}$.

Zieht man also (Fig. 217) $\overline{ab}_\alpha$ beliebig und macht $\overline{ab}_\alpha = \overline{ab}$ (gegebene Strecke), so ist b_α die Spur der Hilfslinie B ; zieht man ferner $a\alpha \parallel ab_\alpha$ und macht $a\alpha = ao$ oder $= ao_1$ (vorausgesetzt, dass $o_1o_2 \perp o_2a$ und o_1o_2 die Distanz ist) so ist α die Flucht der B , und demnach ab_α die Perspektive B' , welche A' in b' schneidet. Hat man von der Spur a aus eine andere Strecke, $\overline{ac}$, auf A aufzutragen, so denkt man sich wieder durch c eine Hilfsgerade (C) gelegt, und macht diese parallel zu B ; dann ist auch für C der Punkt α die Flucht, und muss $\overline{ac}_\alpha = \overline{ac}$ gemacht werden. Hat man sich daher für die Annahme der Hilfslinie entschieden, so kann man den Punkt α (Flucht der Hilfslinie) für alle auf A aufzutragenden Strecken beibehalten, und ihn so zur Eintheilung der Geraden A benützen. Deshalb heisst man diesen Punkt α Theilungspunkt der Geraden A . Man sieht also:

- 1) Theilungspunkt einer Geraden ist der Punkt der Tafel, welcher von der Flucht der Geraden so weit, als das Auge, entfernt ist; es gibt also unendlich viele Theilungspunkte (darunter auch o_1) einer Geraden, die einen Kreis bilden, den wir Theilungskreis nennen wollen,
- 2) hat man einen Theilungspunkt α der Geraden A (oder aa) gewählt, und will man von ihrer Spur a aus eine Strecke ab darauf abtragen, so zieht man $ab_\alpha \parallel a\alpha$, macht $\overline{ab}_\alpha = \overline{ab}$, und verbindet α mit b_α , so liegt in dieser Verbindungslinie b' , demnach

- 3) α , b' und b_α liegen in einer Geraden;
- 4) sind ab_α und $a\alpha$ (wie in unserer Figur) entgegengesetzt gerichtet, so liegt b' zwischen a und α , also b hinter der Tafel.

563. Da man α (in der Entfernung $\overline{o_1 a}$ von a) beliebig annehmen kann, so ist es zweckmässig es so zu wählen, dass αb_α und A' sich möglichst rechtwinkelig schneiden, und demnach b' sich möglichst scharf ergibt. Abgesehen hievon kann man α auch so wählen, dass es auf o_1 fällt, und so, dass es auf $\mathfrak{H}_A$, und demnach b_α auf A_2 fällt. Jedenfalls wollen wir hier festsetzen, dass wir den Theilungspunkt einer Geraden mit demselben Buchstaben aus dem kleinen griechischen, wie die Flucht aus dem kleinen deutschen und die Gerade aus dem grossen lateinischen Alphabete bezeichnen. Heisst also die Gerade A , B , C etc. so wird ihre Flucht mit a , b , c etc. und ihr Theilungspunkt mit α , β , γ etc. bezeichnet. Ferner wollen wir die Punkte b_α , c_α etc. Theilungsrisse der Punkte b , c etc. nennen, und, wie in unserer Figur mit denselben, wie die Punkte selbst bezeichnen, aber versehen (als Index) mit dem Buchstaben am Theilungspunkte.

Fig. 217. 564. Hätte man von der Geraden A ausser der Flucht a noch den Riss (A_2) und die Perspektive A , und sollte man von einem durch seine Perspektive b' gegebenen Punkte b der Geraden eine Strecke $\overline{ab}$ auftragen, so müsste man zunächst die Spur a (als Schnitt von A_2 und A') suchen, nun durch a eine Parallele zu $a\alpha$ zeichnen, so läge darauf der Theilungsriß b_α des Punktes b und ist daher $\overline{ab_\alpha} = \overline{ab}$. Soll nun von b aus die Strecke $\overline{bc}$ z. B. nach rückwärts aufgetragen werden, so ist $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$ und $\overline{ac_\alpha} = \overline{ac}$ also auch $\overline{b_\alpha c_\alpha} = \overline{bc}$. Macht man also $\overline{b_\alpha c_\alpha} = \overline{bc}$ und zieht αc_α ; so erhält man c' . Man sieht also:

Die Theilungsrisse zweier Punkte einer Geraden, sind so weit von einander entfernt, als die Punkte selbst.

Fig. 218. 565. Ist wieder o_2 der Augpunkt, a_2 der Riss eines Punktes a , sind ausserdem die Distanz (des Auges o von der Tafel) und die Distanz (der Abstand) des hinter der Tafel liegenden Punktes (von der Tafel) bekannt, und soll man die Perspektive des

Punktes a suchen, so hat man einen speziellen Fall des oben (562) behandelten allgemeinen Falles. Denn der Punkt a liegt auf einer bekannten Geraden (a_2), nemlich auf der in a_2 zur Tafel gedachten Senkrechten, deren Spur offenbar in a_2 und deren Flucht in o_2 liegt. Ferner ist wieder bekannt, wie weit der Punkt a von der Spur a_2 entfernt ist (nemlich so weit, als die Distanz des Punktes lang ist). Wir dürfen also nur wieder den Theilungspunkt der Geraden a_2 suchen. Allein da hier der Fluchtpunkt unserer Geraden mit o_2 zusammenfällt, so kann jede durch o_2 in der Tafel gezogene Gerade als Horizont unser Geraden angesehen werden. Wir zeichnen dann gewöhnlich eine Horizontale (Parallele zum oberen Rande des Blattes) durch o_2 und nennen diese schlechtweg Horizont (im Gegensatz dazu nennt man oft den Horizont einer Geraden, der nicht horizontal ist, schiefen Horizont), und bezeichnen ihn mit ξ . Tragen wir daher die Entfernung von o bis o_2 (d. h. die Distanz) auf den Horizont von o_2 (etwa nach links) auf, so bekommen wir den Punkt ω (der von o_2 um die Distanz entfernt ist, und deshalb Distanzpunkt genannt wird), welcher den Theilungspunkt eines Lothes (d. i. einer senkrechten zur Tafel) verstellt [auch hier gibt es wie oben (563) einen Theilungskreis dessen Halbmesser gleich der Distanz ist, und dessen Peripheriepunkte alle als ω angesehen werden können]. Will man nun a' finden, so muss man (s. 562) durch a_2 eine Parallele zu ξ (nach rechts, weil $o_2\omega$ nach links gerichtet ist) ziehen, und darauf die Distanz des Punktes, nemlich $\overline{a_2 a_\omega}$ auftragen. Verbindet man nun a_ω mit ω , so erhält man dadurch a' (als Schnitt von $a_2 o_2$ und $a_\omega \omega$). Hieraus sieht man, dass, wenn o_2 und die Distanz bekannt sind, jeder Punkt a durch a' und a_2 sich bestimmen lässt (da wir hieraus die Distanz des Punktes finden können). Wir werden daher künftig einen Punkt a durch a_2 und a' geben und ihn dann Punkt a nennen. Ferner geht aus unserer Figur zugleich der Satz hervor:

Der Riss (a_2), die Perspektive (a') eines Punktes und der Augpunkt (o_2) liegen in einer Geraden.

Anm. Wenn daher in Fig. 217, wo von dem Punkte b nur die Perspektive b' nicht aber der Riss (b_2) gegeben ist, dieser Riss angegeben werden sollte, so dürfte man nur durch

o_2 und b' eine Gerade legen, und sehen, wo sie A_2 (worin b_2 offenbar liegen muss) trifft.

566. Ist wieder o_2 der Augpunkt, ω der Distanzpunkt, und ein Punkt a (durch a_2 und a') gegeben, durch welchen wir eine zur Tafel parallele Gerade A legen sollen, so geben wir diese Gerade durch ihren Riss (A_2) mit welchem sie ja parallel ist, und die Perspektive der Geraden ist A' , welches durch a' geht, und parallel zu A_2 ist. Einen Fluchtpunkt hat die Gerade A nicht, folglich auch keinen Theilungspunkt. Sollen wir nun auf eine solche Gerade (die parallel zur Tafel ist) von a aus ein Stück $\overline{ab}$ auftragen, so können wir zunächst den Riss (b_2) von b finden, denn es ist hier offenbar $\overline{a_2b_2} = \overline{ab}$. Da aber b_2 , b' und o_2 in einer Geraden liegen, so finden wir aus b_2 leicht auch b' .

§ 42.

Aufgaben aus der Perspektive.

567. Die Aufgaben, welche wir lösen wollen, sollen darin bestehen, die Perspektiven von gesuchten Gebilden zu finden, welche gegen gegebene Dinge in bestimmten Beziehungen stehen. Zur Bestimmung der gegebenen Dinge bedienen wir uns wie in den beiden letzten § nur einer einzigen Tafel, und geben

- 1) einen Punkt durch Riss und Perspektive oder durch Riss und Distanz (des Punktes von der Tafel);
- 2) eine Gerade durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Flucht;
- 3) eine Ebene durch Spur und Flucht, durch drei Punkte, durch einen Punkt und eine Gerade, oder durch zwei Gerade.

Von dem Gesuchten aber haben wir eigentlich bloß die Perspektive anzugeben; allein wir können immerhin, bis wir zu praktischen Beispielen kommen, ausser der Perspektive des Gesuchten auch noch weitere Bestimmungsmittel desselben angeben. Zur Lösung unserer Aufgaben machen wir besonders von dem im vorigen § aufgefundenen Gesetzen über Flucht und Theilungspunkt einer Geraden, nebst den daraus hervorgegangenen Beziehungen zwischen Riss, Distanz und Perspektive eines

Punktes Gebrauch. Wir wollen nun zunächst einige Aufgaben über Punkte, gerade Linien und Ebenen lösen, und noch weitere Aufgaben dem Schüler zur Lösung vorlegen.

568. Aufg. Es sind gegeben zwei Punkte a und b (durch Fig. 220. ihre Risse a_2 , b_2 und ihre Perspektiven a' , b'); man sucht die Spur und Flucht der Geraden ab .

Aufl. Offenbar ist die Verbindungslinie von a_2 und b_2 der Riss (A_2) und die Verbindung von a' und b' die Perspektive (A') der Geraden ab ; demnach der Schnitt m von A_2 und A' die Spur der Geraden A . Zieht man durch den Augpunkt o_2 eine Parallele zu A_2 , so ist dies der Horizont ($\S_A$) von A , in welchem die Flucht a der Geraden A liegt. Es erscheint daher a als Schnitt von $\S_A$ und A' .

Anm. Ist noch ein dritter Punkt (c) gegeben, und sucht man noch Spur (n) und Flucht (b) der Geraden ac , so ist die Gerade mn die Spur und ab die Flucht der Ebene abc (s. 560.).

569. Aufg. Es sei, ausser dem Augpunkt o_2 und seiner Fig. 221. Distanz o_2o_1 , ein Punkt a (durch Riss und Distanz) und die Flucht a einer durch a gehenden Geraden A gegeben; man soll auf diese von a aus eine Strecke ab nach rückwärts auftragen (d. h. die Perspektive des Punktes b suchen).

Aufl. Da o_2a der Horizont von A ist, so nehmen wir diese Linie als Horizont an und tragen darauf von o_2 die Distanz $o_2\omega$ auf, wodurch wir den Distanzpunkt ω erhalten. Ziehen wir nun $a_2a_\omega \parallel \S$ (nach links, da $o_2\omega$ nach recht gerichtet ist) und machen a_2a_ω gleich der gegebenen Distanz (von der Tafel) des Punktes a , so erhalten wir (565), als Schnitt der Geraden ωa_ω und a_2o_2 , die Perspektive a' und daraus (durch Verbinden von a' und a) A' . Zieht man nun durch a_2 eine Parallele zu $\S$ worauf hier α liegen soll, so erhält man A_2 , auf welcher Linie der Theilungsriss a_α (s. 564) liegt, und zwar in der Verbindungslinie vom Theilungspunkt α (den man nach 563 erhält, wenn man $a\alpha = ao_1$ macht) und a' . Macht man nun noch $a_\alpha b_\alpha = ab$ (aufzutragende Strecke) und zieht αb_α , so erhält man b' .

570. Aufg. Es sind gegeben drei Gerade A , B , C (durch Fig. 222. ihre Spuren a , b , c und ihre Fluchtpunkte a , b , c); man sucht eine Gerade D , die mit A parallel ist, und B , C schneidet.

Aufl. Bekanntlich findet man D, wenn man durch B eine Ebene $\mathfrak{A}$ legt parallel zu A, ebenso durch C eine Ebene $\mathfrak{B}$ parallel zu A, und den Schnitt beider Ebenen sucht. Es müssen demnach die Fluchtlinien (s. 560.) beider Ebenen durch α gehen da jede eine Parallele zu A, deren Flucht α ist, enthalten muss. Ausserdem muss die Flucht von $\mathfrak{A}$ auch durch β gehen, und da ihre Spur parallel zur Flucht ist, so ist die durch β zu $\alpha\beta$ gezogene Parallele M die Spur von $\mathfrak{A}$; ebenso N die Spur von $\mathfrak{B}$, und daraus d (der Schnitt von M und N) die Spur der gesuchten Geraden. Da die Flucht derselben aber α ist, so ist da die gesuchte Perspektive D'.

Fig. 223. 571. Aufg. Es ist gegeben eine Gerade A durch Spur a und Flucht α ; man sucht eine Ebene, die auf dieser Geraden senkrecht steht.

Aufl. Verbindet man o_2 und α so erhält man den Horizont ($\mathfrak{H}$) von A, welcher bekanntlich parallel zum Riss von A ist; und da auf diesem die Spur unserer Ebene senkrecht stehen muss, und die Flucht der Ebene parallel ihrer Spur ist, so erhält man folgenden Satz:

- 1) Wenn eine Ebene auf einer Geraden senkrecht steht, so ist auch die Flucht der Ebene senkrecht zum Horizont der Geraden.

Um aber die Flucht der Ebene zu erhalten muss man durch das Auge eine Ebene parallel zur gesuchten, also durch das Auge eine Ebene legen, die auf der Geraden, oder auf ihrem Hauptstral, d. i. auf der Geraden oa senkrecht steht, und welche die in der Geraden $\mathfrak{H}$ zur Tafel senkrechte Ebene, die wir als $\mathfrak{I}_1$ ansehen wollen, nach einer Geraden ob schneidet, welche auf oa senkrecht steht. Klappen wir daher die $\mathfrak{I}_1$ um $\mathfrak{H}$ in die Tafel wodurch o nach o_1 kommt (wenn o_1o_2 gleich der Distanz) und ziehen wir $o_1b \perp o_1a$, so ist b ein Punkt der Flucht und $\mathfrak{B}$ (durch b und senkrecht zu $\mathfrak{H}$) die Flucht der gesuchten Ebene. Wir sehen also

- 2) Wenn eine Gerade A auf einer Ebene senkrecht steht und wir ziehen vom Auge o nach der Flucht α der Geraden die Gerade oa , und nach dem Punkt b , in welchem die Flucht der Ebene den

Horizont von A schneidet, eine Gerade ob , so ist $oa \perp ob$.

Anm. Da die Hauptstrahlen aller auf A senkrechten Geraden in der Ebene $\mathfrak{B}$ liegen, so ist die Flucht einer jeden auf A senkrechten Geraden in $\mathfrak{B}$. Wenn demnach o_2 und die Distanz gegeben sind, so kann man leicht untersuchen, ob zwei Gerade, deren Fluchtpunkte gegeben sind, auf einander senkrecht stehen oder nicht.

572. Der Schüler versuche folgende Aufgaben zu lösen.

1) Den Schnitt zweier durch Spuren und Fluchten gegebenen Ebenen zu suchen;

2) den Schnittpunkt einer Geraden (a, a') und einer Ebene $(A, \mathfrak{U})$ zu finden (beide durch Spur und Flucht gegeben). Zur Lösung dieser Aufgabe legt man durch die Gerade (a, a') eine beliebige Ebene (Spur und Flucht), sucht den Schnitt beider Ebenen, und wo die Perspektive des Schnittes die der Geraden (a, a') schneidet, ist die Perspektive des Schnittpunktes;

3) durch einen Punkt (a_2, a') eine Ebene parallel einer gegebenen $(A, \mathfrak{U})$ finden.

4) durch einen Punkt (a_2, a') eine Gerade zu legen, die eine gegebene Gerade (b, b') rechtwinkelig schneidet.

573. Aufg. Die Perspektive einer ebenen Curve B zu Fig. 224. finden.

Aufl. Wir nehmen an, dass von der Ebene der Curve B Spur A und Flucht $\mathfrak{U}$ bekannt sind, und legen durch das Auge eine als $\mathfrak{T}_1$ betrachtete Ebene, welche auf der Spur A der gegebenen Ebene senkrecht steht, und klappen diese $\mathfrak{T}_1$ um ihren Horizont ($\mathfrak{H}$) nebst dem Auge um. Ferner betrachten wir die Ebene $(A, \mathfrak{U})$ der Curve B als neue Tafel ($\mathfrak{T}_3$), und klappen sie um A in die Tafel, so dass B nach B_3 kommt. Soll man nun von einem Punkte b der Curve (dessen dritter Riss b_3 ist) die Perspektive suchen, so denken wir uns durch b eine in der Ebene $(A, \mathfrak{U})$ der Curve liegende Gerade gelegt, am besten eine Parallele (C) zur $\mathfrak{T}_1$, deren Riss (C_2) demnach parallel zu $\mathfrak{H}$ ist und durch b_3 geht. Dann ist aber der Schnittpunkt c von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{U}$ die Flucht und der Schnitt c von C_2 und A die Spur von C. Da ferner b von der Spur c um $\overline{bc} = \overline{b_3c}$ entfernt ist, so haben wir die früher (562) besprochene Aufgabe zu lösen.

Suchen wir daher den Theilungspunkt (γ) der Geraden C, so finden wir auf bekannte Art (s. 563) b' . In ähnlicher Weise verfahren wir für jeden anderen Punkt der Curve (für welchen c und γ dieselbe Lage, wie für b behalten), wodurch wir von der gesuchten Perspektive B' so viele Punkte finden können, als wir nöthig zu haben glauben.

Wollen wir die Tangente der gesuchten Perspektive B' im Punkte b' , so zeichnen wir die Tangente D_3 an B_3 im Punkte b_3 und suchen die Perspektive dieser Tangente. Offenbar ist aber der Punkt d (in welchem D_3 und A sich schneiden) die Spur der gesuchten Tangente, demnach auch ein Punkt der Perspektive dieser Tangente. Man sieht also:

Zieht man in b_3 eine Tangente D_3 an B_3 und verbindet den Punkt d , in welchem D_3 und A sich schneiden, mit b' , so ist db' die Tangente an B' im Punkte b' .

Anm. Als besondere Punkte der Curve B_3 wird man diejenigen betrachten dürfen, nach denen B_3 von Parallelen zu $\S$ und zu A , dann von Geraden, die durch γ gehen, berührt wird.

Fig. 225.

574. Ist die ebene Curve B , deren Perspektive gesucht wird ein Kreis, der durch Umklappung um A nach B_3 kommt, so nehmen wir hier die zur $\mathfrak{L}_1$ parallele Gerade C so an, dass sie durch den Mittelpunkt von B geht, und suchen, nach Anleitung der vorigen Nummer die Perspektiven b' , c' der im Durchmesser C des Kreises liegenden Punkte. Die Tangenten der Perspektive B' in den Punkten b' , c' sind dann parallel zu A . Da nun die gesuchte Perspektive des hinter der Tafel vorausgesetzten Kreises B eine Ellipse ist, und die Tangenten derselben in b' und c' parallel laufen zu A , so ist $b'c'$ ein Durchmesser und die Mitte d' von $\overline{b'c'}$ der Mittelpunkt der Ellipse. Sucht man den Punkt d_3 auf b_3c_3 der d' entspricht (d. h. der mit d' verbunden nach dem Theilungspunkt γ führt), zieht $d_3e_3 \perp b_3c_3$, und sucht die Perspektive e' des in B_3 liegenden Punktes e_3 , so sind $\overline{d'e'}$ und $\overline{b'd'}$ konjugirte Halbmesser der gesuchten Ellipse, und man kann diese nun konstruiren (s. 210. Anm.)

Anm. 1. Läge der Kreis in einer Ebene parallel zur Tafel, so wäre seine Perspektive B' wieder ein Kreis. Ist dann der Riss und die Distanz des Kreismittelpunktes a gegeben, so kann

man dessen Perspektive a' finden (s. 565). Zeichnet man noch den Riss des Kreises und nimmt darauf einen Punkt b_2 an (die Distanz von b ist gleich der von a) so erhält man b' , wodurch B' gehen muss.

Anm. 2. Hätte man statt des Kreises B eine Ellipse (die wieder hinter der Tafel liegt), so dass die Perspektive der Ellipse B eine Ellipse B' wäre, so würde man an B_3 zu A parallele Tangenten legen, die B_3 nach b_3, c_3 berühren, und nun mit dem Durchmesser $\overline{b_3c_3}$ ähnlich wie oben mit dem Durchmesser des Kreises verfahren; man erhielte dann wieder zwei konjugirte Halbmesser der Ellipse B' .

575. Soll die Perspektive einer unebenen Curve A gefunden werden, so muss der Riss ($\mathfrak{R}_2$) dieser Curve gegeben sein, und ausserdem noch der Riss auf der ersten Tafel ($\mathfrak{T}_1$) die wir durch das Auge o horizontal legen und umklappen. Nimmt man dann auf dem Riss (A_2) einen Punkt a_2 an und sucht den entsprechenden ersten Riss (a_1) so kann man aus diesem den Abstand (Distanz) des Punktes a von der Tafel ermitteln. Haben wir aber von dem Punkte a seinen Riss (a_2) und seine Distanz, so können wir (s. 565) dessen Perspektive a' finden. Verfahren wir so für viele nicht zu weit von einander entfernte Punkte und verbinden ihre Perspektiven durch eine Curve, so erhalten wir die verlangte Perspektive A' .

Wollen wir in a' die Tangente B' für A' , so zeichnen wir zuerst die Tangenten B der Curve A im Punkte a (durch ihre Risse (B_1, B_2), nehmen auf B einen Punkt b an und suchen seine Perspektive b' . Am Zweckmässigsten nimmt man auf B den Punkt b so an, dass er die Spur von B ist, dann ist b zugleich b' , und ba' die verlangte Tangente. — Der Schüler wird gut thun, wenn er diese Aufgabe zu lösen versucht; er mag als Beispiel eine Schraubenlinie wählen deren Axe vertikal ist.

576. Hat man die Perspektive eines durch eine ebene Grundlinie A und Spitze a gegebenen Kegels zu suchen, so kann man die Grundlinie, wie oben (573) geben, und ihre Perspektive A' suchen. Zeichnet man noch die Perspektive a' der Spitze a , und zieht (wenn möglich) von a' Tangenten an A' so erhält man noch den Perspektiv-Umriss des Kegels.

577. Hat man die Perspektive eines von zwei ebenen Curven begrenzten Cylinders, so sucht man (wieder nach 574) die Perspektiven der beiden Curven, und legt daran gemeinschaftliche Tangenten, welche die perspektivischen Umrisse des Cylinders vorstellen. Da aber diese Umrisse zugleich Perspektiven von Erzeugenden des Cylinders sind, so müssen sie durch den Fluchtpunkt der Erzeugenden (den man also suchen muss) gehen, oder, wenn die Erzeugenden parallel zur Tafel sind (und daher keine Flucht haben) mit den Erzeugenden parallel laufen.

578. Hat man die Perspektive einer anderen Fläche, z. B. einer Drehfläche, zu finden, so ist es am Besten, sich dazu der Methode der darstellenden Geometrie zu bedienen. Man wird nemlich zunächst die Fläche nach den Regeln der darstellenden Geometrie in Bezug auf die beiden Tafeln (die Perspektivtafel als $\mathfrak{T}_2$ und die durch das Auge gelegte horizontale Tafel als $\mathfrak{T}_1$) bestimmen; steht also die Axe der Drehfläche senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so wird man die Axe und den Hauptmeridian durch ihre Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) zeichnen. Nur etwas von der gewöhnlichen Art abweichendes wollen wir hier empfehlen. Gewöhnlich, wenn man die beiden Tafeln so annimmt, dass $\mathfrak{T}_1$ horizontal und $\mathfrak{T}_2$ vertikal ist, betrachtet man den ersten Riss als eine Ansicht von oben nach unten, und klappt die $\mathfrak{T}_1$ so um dass ihr vor der $\mathfrak{T}_2$ liegende Theil nach unten kommt. Für Perspektivzeichnungen aber, wo die darzustellenden Gebilde gewöhnlich hinter der Tafel ($\mathfrak{T}_2$) liegen, würde bei der üblichen Umklappungsart der $\mathfrak{T}_1$ der erste Riss den zweiten mehr oder weniger decken und die Zeichnung dadurch unklar werden. Darum empfiehlt sich's hier, die $\mathfrak{T}_1$ so umzuklappen, dass ihre vordere Hälfte und mit ihr o_1 nach oben kommt, und demnach der erste Riss des hinter der Tafel liegenden Gebildes nach unten.

Hat man nun so die Fläche in Bezug auf die beiden Tafeln bestimmt, so löst man die Aufgabe (391.) vom Punkte o aus an die Drehfläche einen berührenden Kegel zu legen, und sucht die Spur (Schnitt mit der $\mathfrak{T}_2$) dieses Kegels, so ist diese die verlangte Perspektive.

Anm. Für diejenigen, welche mit der Methode der darstellenden Geometrie nicht bekannt sind, muss folgendes Verfahren

gewählt werden. Man nimmt auf der Drehfläche einen Parallelkreis an, sucht (nach 574) die Perspektive dieses Kreises, wiederholt dieses Verfahren für sehr viele Kreise und zeichnet aus freier Hand eine Curve M, welche die Perspektiven aller der Kreise berührt. Hierbei kann es vorkommen, dass manche der gezeichneten Kreise innerhalb der Curve M liegen, ohne sie zu berühren, und dass man daher diese Kreise umsonst gezeichnet hat. Dieses Verfahren ist überhaupt sehr umständlich, führt zu sehr ungenauen Ergebnissen, und ist demnach für solche, die mit der darstellenden Geometrie bekannt sind, nicht zu empfehlen.

579. Hat man die Perspektive einer Kugel zu finden, so müsste man eigentlich vom Auge o aus an dieselbe einen berührenden Kegel legen, dessen Schnitt mit der Tafel die verlangte Perspektive wäre. Dieser Schnitt ist aber nur dann ein Kreis wenn die Axe des Kegels senkrecht zur Tafel steht, ausserdem eine Ellipse. Allein bei der gewöhnlichen Lage des Auges gegen die Tafel (s. 556) weicht der Winkel, den die Axe des eben genannten berührenden Kegels mit der Tafel bildet von einem rechten Winkel so wenig ab, dass wir die Perspektive der Kugel stets als Kreis zeichnen dürfen; als Mittelpunkt dieses Kreises betrachten wir die Perspektive des Kugelmittelpunktes, und als dessen Halbmesser, wenn wieder wie gewöhnlich die Kugel hinter der Tafel liegt, eine Strecke, die sich zum Kugelhalbmesser verhält, wie die Distanz des Auges zur Summe der Distanz des Auges und der Distanz des Kugelmittelpunktes.

Anm. Wenn man vielleicht unbegreiflich findet, wie die Perspektive einer Kugel eine Ellipse sein kann, da man die Kugel doch stets als vollkommen runden Kreis sieht, so darf man nur nicht vergessen, dass man die Perspektive, wenn sie den rechten Eindruck machen soll stets vom Auge o aus ansehen muss; von diesem Punkte aus erscheint aber die Ellipse als Kreis. Denn die von der Ellipse nach o gedachten Strahlen bilden ja den obengenannten berührenden Kegel, der die Kugel nach einem Kreise berührt, welcher dieselben Strahlen dem Auge zusendet, wie die Ellipse.

Fig. 226. 580. Aufg. Man soll die Perspektive des Spiegelbildes eines Punktes a finden, wenn die Horizontalebene A_2 die Spiegelfläche ist.

Aufl. Es versteht sich wohl von selbst, dass, wenn a sich in A_2 spiegeln und sein Bild vom Auge o gesehen werden soll, a und o über A_2 liegen müssen. Ist nun a_2 der Riss, a' die Perspektive des Punktes a , und denken wir uns von a auf die Ebene A_2 eine Senkrechte gefällt, welche A_2 in einem Punkte b schneidet, so liegt bekanntlich das Spiegelbild von a so tief unter b , als sich a über b befindet. Bezeichnet man nun das Spiegelbild von a mit c , so ist offenbar b_2 (der Punkt auf der Vertikalen $a_2 b_2$, welcher in A_2 liegt) der Riss von b , und der Punkt c_2 , welcher auf $a_2 b_2$ so weit unter, als a_2 über b_2 liegt, der Riss von c . Wie man nun noch die Perspektiven b' , c' findet, geht aus der Zeichnung hervor und ist leicht zu erklären. Es ist aber noch zu bemerken, dass in praktischen Fällen die Ebene A_2 begrenzt ist, und dass dann die Perspektiven ihrer Grenzen gezeichnet werden. In diesem Falle gilt der Punkt c' nur, wenn er innerhalb der perspektivischen Grenzen der Spiegelfläche liegt; wo nicht, so spiegelt sich der Punkt in der Fläche für unser Auge (o) nicht.

Anm. Ist a' die Perspektive eines unendlich fernen Punktes (z. B. des Mittelpunktes der Sonne, den wir ja als unendlich ferne betrachten können), dann ist auch b in unendlicher Ferne; es fällt daher in diesem Falle $o_2 b_2$ also auch b' in $\mathfrak{H}$, a' über $\mathfrak{H}$ und c' so weit unter $\mathfrak{H}$, als a' über $\mathfrak{H}$ liegt.

Fig. 227. 581. Aufg. Es sind gegeben die Perspektiven zweier Rechtecke, die eine horizontale Seite (ab) gemein haben, und von denen eines horizontal und eines vertikal steht. Ferner eine begrenzte vertikale Gerade gh , deren unterer Punkt g in dem horizontalen Rechtecke liegt; man sucht die Perspektive des Schlagschattens, den hg auf die beiden Rechtecke wirft, wenn die Lichtstrahlen mit einer gegebenen Geraden parallel laufen.

Aufl. Nehmen wir an, dass die beiden Seitenrichtungen des horizontalen Rechteckes zu Hauptstrahlen die (auf einander senkrechten) A_1 , B_1 und demnach als Fluchtpunkte a , b haben, so erhalten die Perspektiven der gegebenen Rechtecke die Gestalten $a'b'c'd'$ und $a'b'e'f'$, so dass $a'b'$ die Perspektive der

gemeinschaftlichen Geraden beider Rechtecke vorstellt. Ist nun $g'h'$ die Perspektive der auf dem horizontalen Rechtecke stehenden Vertikalen, und ist die Richtung des Lichtstrales durch seine beiden Risse ($\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) gegeben, so legt man durch das Auge o eine Parallele C zum Lichtstral, und sucht von diesem (nach den Regeln der darstellenden Geometrie) die Spur (d. h. die Spur auf $\mathfrak{T}_2$), also c , so ist dies der Fluchtpunkt des Lichtstrales, während offenbar c_1 (der Schnitt von C_1 mit $\mathfrak{H}$) der Fluchtpunkt von C_1 ist. Will man nun den Schlagschatten von h auf dem horizontalen Rechtecke, so darf man nur bedenken, dass g der Riss des Punktes h auf diesem Rechtecke ist, dass also wenn man durch g eine Parallele zu C_1 (dem ersten Risse des Lichtstrales) und durch h eine Parallele zu C (zum Lichtstral selbst) sich gelegt denkt, der Schnitt dieser beiden Parallelen der verlangte Schlagschatten ist. Zieht man daher in unserer Zeichnung (Fig. 227) durch g' eine Gerade nach c_1 (die Perspektive der Parallelen zu C_1) und durch h' eine Gerade nach c (die Perspektive der Parallelen zu C), so ist der Schnitt k' dieser beiden Geraden die Perspektive des Schlagschattens von h und demnach $g'k'$ die der Vertikalen gh auf dem horizontalen Rechtecke. Da aber in unserem Beispiele k' über die Grenzen des horizontalen Rechtecks hinausfällt, so gilt auf diesem nur $g'l'$ (l' liegt auf $a'b'$) als Schlagschatten, und fällt ein Theil unseres Schlagschattens auf das vertikale Rechteck, demnach auf die Vertikale $l'm'$ auf welcher also auch der Schlagschatten liegt, den h auf das vertikale Rechteck wirft. Da aber dieser Schlagschatten auch auf $h'c$ fällt, so ist m' dieser Schlagschatten.

Hat man also von einer horizontalen und einer vertikalen Ebene die Perspektive ihres Schnittes und von beliebig vielen Punkten die Perspektiven der Punkte selbst, so wie die ihrer Risse auf der horizontalen Ebene, so kann man gleich in der Perspektive selbst die Schlagschatten dieser Punkte auf beiden Ebenen konstruiren.

582. Soll man Schatten konstruiren, von denen man nicht weiss, wie man sie in der Perspektive unmittelbar findet, so konstruirt man die Schatten in den Rissen, und sucht aus den Rissen der Schattengrenzen deren Perspektiven.

§ 43.

Ueber praktische Aufgaben aus der Perspektive.

583. Indem wir jetzt dreierlei Methoden der graphischen Darstellung von räumlichen Gebilden, nemlich Risse ($\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$), Parallelperspektive und Centralperspektive kennen gelernt haben, hat sich zugleich herausgestellt, dass wir stets die Risse anwenden, wenn wir Zeichnungen machen sollen, nach denen man soll arbeiten können; dass wir uns der Parallelperspektiven bedienen, wenn man eine übersichtliche Zeichnung haben will, aus welcher die Dimensionen des Körpers sich theilweise (in den Richtungen X, Y, Z) entnehmen lassen: dass wir aber die eigentliche Perspektive, die Centralperspektive, benützen, wenn wir eine Zeichnung wollen, die uns den ästhetischen Eindruck erfahren lässt, den der Körper selbst, von einem bestimmten Punkte aus gesehen, auf uns macht. Die fertige Perspektivzeichnung enthält daher nichts weiter, als die Perspektive des darzustellenden Körpers, und werden daher die während der Konstruktion der Zeichnung nothwendigen Risse von Punkten und Linien, der Augpunkt, die Fluchtpunkte etc. weggelöscht.

Die Herstellung einer solchen Perspektive geschieht dann entweder deshalb, um von einem auszuführenden Körper, z. B. einer Kirche, Villa, Brücke etc., vor seiner Anfertigung zu erfahren, welche Erscheinung er von einem bestimmten Standpunkte aus gewährt, damit sowohl der Baumeister als der Besteller, wenn ihnen die Erscheinung nicht gefällt, Abänderungen veranlassen können; oder es wird eine solche Perspektive hergestellt, ohne dass man den dargestellten Gegenstand ausführen zu lassen beabsichtigt, lediglich deshalb, um als Bild dem Beschauer einen Kunstgenuss zu gewähren. Wir wollen hier hauptsächlich den ersten Fall in's Auge fassen, also den, wo ein Bauwerk, das ausgeführt werden soll, den Gegenstand der Perspektivzeichnung bildet. In diesem Falle werden gewöhnlich von dem Baumeister nach dem ihm vorgelegten Programm zuerst die Risse (Grund- und Aufriss) gezeichnet, und dann erst die Perspektive hergestellt.

Fig. 228. 584. Die meisten Bauwerke, deren Perspektiven gezeichnet werden, haben parallelepipedische Grundform, deren drei Kan-

tenrichtungen X, Y, Z mit Länge, Tiefe (oder Breite), Höhe bezeichnet werden; Länge und Tiefe sind horizontal, die Höhe ist vertikal gerichtet. Wir wollen daher unsere Betrachtung an einem rechtwinkligen Parallelepiped dessen eine Kantenrichtung vertikal steht, vornehmen.

Stellen nun von den in unserer Zeichnung (Fig. 228) dargestellten Rechtecken das untere den Grund- und das obere den Aufriss eines Parallelepipeds vor, dessen Perspektive man zu zeichnen beabsichtigt, so wird man vor Allem feststellen müssen, von welchem Standpunkte aus der Körper angesehen werden soll, namentlich, welche Flächen desselben angesehen werden. Zeichnen wir im Grundriss eine Gerade $a_1 o_1$ und betrachten o_1 als den ersten Riss des Auges, so wird man von der Seite $a_1 c_1$ um so mehr und zugleich von $a_1 b_1$ um so weniger sehen, je kleiner man den Winkel $c_1 a_1 o_1$ macht. Wird dieser Winkel ein rechter, so sieht man von $a_1 b_1$ gar nichts. Hat man sich nun für die Richtung $o_1 c_1$ entschieden, so fragt es sich zunächst, an welcher Stelle darauf der Punkt o_1 (erster Riss des Auges o) angenommen wird. Hier kommt nun in Betracht, dass wir bei Beschauung des Objektes unser Auge so aufstellen müssen, dass wir jenes auf einmal überblicken können, d. h. dass wir ohne unseren Kopf zu bewegen, blos durch kleine Bewegungen des Auges (die also den Punkt o nicht merklich verrücken) alle Punkte des Objektes deutlich wahrnehmen können. Dies ist nahezu der Fall, wenn, bei nicht sehr hohen Objekten, d. h. solchen deren Höhe nicht grösser ist als die Länge oder Breite, (und solche kommen gewöhnlich vor) der Winkel (der ersten Risse der äussersten Sehstralen) $b_1 o_1 c_1 = 40^\circ$ ist; man kann aber, wenn es die Umstände verlangen, auch noch bis zu einem Winkel von 60° vorzugehen sich gestatten, wogegen wir bei verhältnissmässig höheren Objekten noch unter 40° herunter gehen.

585. Die in voriger Nr. gegebenen Auseinandersetzungen Fig. 228. lassen sich nur dann buchstäblich verwenden, wenn die Dimensionen des parallelepipedischen Objektes so klein sind, dass man sie auf dem Zeichnungsblatte in ihrer wirklichen Grösse auftragen kann, und auf demselben noch Raum bleibt zur Darstellung des Punktes o_1 . Dies ist aber in der Regel nicht der Fall; denn praktische Perspektivaufgaben beziehen sich, wie schon

erwähnt, auf Bauwerke, deren Dimensionen die des Zeichnungsblattes bei Weitem überschritten. Um nun aber dennoch das in voriger Nummer Gesagte anwenden zu können, denke man sich das Objekt in seiner wahren Grösse aufgestellt und irgendwo das Auge des Beschauers (als Punkt o) und von allen Ecken (a, b, c etc.) des Objektes nach o Stralen (oa, ob, oc etc.) gezogen. Tragen wir nun von o aus auf diese Stralen Strecken oa, ob, oc etc. auf, die in einem bestimmten Verhältnisse zur wirklichen Grösse der betreffenden Strecken verkleinert sind, so bilden die Punkte a, b, c etc. die Ecken eines dem gegebenen ähnlichen Objektes, welches letztere ein verjüngtes Modell des gegebenen Objektes genannt werden soll. Dieses verjüngte Modell führt dem Auge dieselben Stralen zu, wie das Objekt selbst, und leistet demnach bei der Aufsuchung der Perspektive ganz dieselben Dienste, wie dieses.

Will man demnach die Perspektive eines projektirten Objectes, zunächst die Lage von o_1 gegen dasselbe aufsuchen, so zeichnet man es (Fig. 228) in einem verjüngten Maßstabe, und sucht o_1 nach Anleitung der vorigen Nummer.

586. Nachdem wir so im Stande sind, die Lage von o_1 gegen $a_1 b_1 c_1 d_1$ (Fig. 228) zu finden, fragt es sich, wie man die Höhe des Punktes o über der Grundfläche des Objektes bestimmt.

Denken wir uns durch das Auge (o) eine Horizontalebene gelegt, die wir wie früher als $\mathfrak{T}_1$ ansehen, (und deren Schnitt mit der Perspektivtafel wir Horizont genannt und mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet haben), so wird in jedem gegebenen Falle bekannt sein, in welchem Punkte diese $\mathfrak{T}_1$ irgend eine Vertikale des Bauwerkes (z. B. eine vertikale Mauerkante ab) schneidet. Denn entweder setzen wir, wie gewöhnlich, den Beobachter auf derselben Horizontalebene stehend voraus, wie die Grundfläche des Bauwerkes, dann wird die Mauerkante von der $\mathfrak{T}_1$ in einem Punkte c geschnitten, der über dem Punkte a , in welchem die Mauerkante die Grundfläche des Baues schneidet, so hoch liegt, als die Höhe des Auges eines stehenden Erwachsenen über seiner Sohle, und dafür können wir 160^{cm} annehmen. Oder der Beobachter steht tiefer oder höher, dann muss bekannt sein, wie tief er und somit auch sein Auge steht, und damit lässt sich wieder der Punkt c angeben, in welchem die Mauerkante ab von der $\mathfrak{T}_1$ geschnit-

ten wird. Sucht man nun die Perspektive $a'b'$ der ab und die (c') von c , so verhält sich $\overline{a'c'} : \overline{b'c'} = \overline{ab} : \overline{cb}$.

587. Hat man nun den Standpunkt des Auges gegen das Fig. 228. Objekt oder dessen verjüngtes Modell gewählt, so wird der Eindruck, den dieses Objekt von dem angenommenen Standpunkte auf das Auge des Beobachters macht, wiedergegeben, durch die Perspektive auf einer Tafel, die wir gewöhnlich zwischen o und dem Objekt aufstellen, und von o aus betrachten. Wie wir auch die Tafel aufstellen, immer wird die darauf konstruierte Perspektive von o aus betrachtet denselben Eindruck auf das Auge des Beschauers machen. Aber je nach der Lage der Tafel wird das perspektivische Bild selbst die oder jene Gestalt annehmen, und wird sich das Auge des Beschauers des Bildes entweder vor dessen vertikaler Mittellinie (was gewöhnlich geschieht) oder rechts oder links von dieser Linie aufstellen. Es wird wohl für gewöhnlich, der Gewohnheit der Beschauer entsprechend, am Zweckmässigsten sein, die Tafel (hier die Ebene A_1) so zu stellen, dass A_1 mit den ersten Rissen (o_1c_1 und o_1b_1) der äussersten Stralen gleiche (oder nahezu gleiche) Winkel bilden, so dass der Augpunkt auf dieser Tafel in (oder nahezu in) die vertikale Mitte der Perspektive kommt; von dieser Regel wird man nur dann abweichen, wenn das dadurch entstandene Bild ästhetisch nicht befriedigend ausfällt. Zugleich ist es bequem die Tafel (A_1) wie in unserer Zeichnung so zu legen, dass eine Kante des Parallelepipeds, hier ae , in der Tafel liegt.

Allein wir haben in Bezug auf die Annahme der Tafel, wie wir schon früher angegeben, noch eine sehr wesentliche Bedingung zu erfüllen, nemlich die, dass die Distanz (welche offenbar gleich der Entfernung $\overline{o_1o_1}$ von o_1 nach A_1 ist) nicht zu klein, etwa nicht kleiner als 30^{cm} ist, damit wir das Bild deutlich sehen können. Haben wir daher nach den in den letzten Nummern gegebenen Anleitungen mittelst des verjüngten Modells o_1 gefunden, und die Richtung von A_1 gewählt, so müssen wir dieses parallel verschieben, bis die Distanz gleich oder grösser als 30^{cm} wird. Wollen wir dann, dass dennoch die vordere Kante des verjüngten Modells in A_1 liegt, so dürfen wir nur statt des angenommenen Modells ein entsprechend grösseres annehmen. Denkt man sich zu dem Ende A_1 parallel verschoben,

bis man die gewünschte Distanz erhalten hat, so darf man nur suchen wo dieses neue A_1 von $o_1 a_1$ geschnitten wird, und von diesem Punkte aus Parallele zu $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$ ziehen, und nachsehen wo sie die Linien $o_1 c_1$ und $o_1 b_1$ schneiden, wodurch man das neue (minder verjüngte) Modell erhält.

Anm. Nimmt man A_1 so an, wie oben angegeben, so ist das zwischen $o_1 b_1$ und $o_1 c_1$ liegende Stück (m) von A_1 , welches offenbar die Breite des ganzen perspektivischen Bildes vorstellt, $= 2d \operatorname{tg} 20^\circ$ wenn d die Distanz bedeutet. Also ist, für $d = 30^{\text{cm}}$, m gleich nahezu 22^{cm} . Dies ist also bei unserer Annahme des Winkels $b_1 o_1 c_1$ (nemlich $= 40^\circ$) die kleinste Breite, welche man der Perspektive geben kann, wenn sie von o aus betrachtet noch deutlich wahrnehmbar sein soll. Wollte man diese Breite kleiner haben, (und doch $d = 30^{\text{cm}}$) so müsste man $\angle b_1 o_1 c_1 < 40^\circ$ machen. Soll aber die Bildbreite grösser als 22^{cm} werden, und behalten wir $b_1 o_1 c_1 = 40^\circ$ bei so muss in demselben Verhältniss auch die Distanz vergrössert werden.

Fig. 228. 588. Fassen wir das in den letzten Nummern über die Annahme des Auges und der Tafel Gesagte zusammen, so sieht man, dass zur Bestimmung dieser Dinge folgender Weg eingeschlagen werden kann.

Wir zeichnen den Grundriss $a_1 b_1 c_1 d_1$ des Parallelepipeds in irgend einem verjüngten Massstabe, und dann die Linien $o_1 b_1$ und $o_1 c_1$ so dass der Winkel bei o_1 40° misst, und man von o_1 die Seiten $a_1 b_1$ und $a_1 c_1$ in solchen Verhältnissen sieht, wie der Zeichner es wünscht. Nun zeichnet man A_1 so, dass es mit $o_1 b_1$ und $o_1 c_1$ ein gleichschenkliges Dreieck bildet und von o_1 so weit entfernt ist, als die Distanz sein soll (wie oben gesagt, muss diese Distanz mindestens 30^{cm} betragen, in welchem Falle die Bildbreite 22^{cm} wird; soll die Bildbreite aber n mal 22^{cm} werden, so muss die Distanz $30 n$ genommen werden). Sucht man nun, wo $o_1 a_1$ die Linie A_1 schneidet und bezeichnet diesen Punkt mit a_1 , legt durch dieses a_1 Parallele zu $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$, nennt die Punkte, wo diese Parallelen die $o_1 b_1$ und $o_1 c_1$ schneiden, b_1 , c_1 , ergänzt diesen neuen Winkel $b_1 a_1 c_1$ zu einem Rechteck $a_1 b_1 c_1 d_1$, und löscht dafür das ursprüngliche Rechteck weg, so erhält man eine Figur gleich dem Grundriss unserer Zeichnung (Fig. 228),

so dass die vordere Vertikalkante des Parallelepipeds in der Perspektivtafel liegt (was für die Ausführung der Perspektive sehr bequem ist). Ist noch die Höhe des Auges über der Ebene A_2 der Grundfläche unseres Objektes bekannt, ist z. B. hier vorausgesetzt, dass der Beobachter auf der Grundflächen-Ebene steht, und daher das Auge 160^{cm} über dieser Ebene (A_2), so ist o_2 über A_2 um 160^{cm} zu nehmen aber auf einem verjüngten Maßstabe gemessen, dessen Verjüngung gleich der des verjüngten Modells ist, also nach dem Maßstabe des Rechteckes $a_1 b_1 c_1 d_1$.

589. Hat man auf diese Art die gegenseitige Lage des Objekts, der Tafel und des Auges mittelst einer Nebenzeichnung ähnlich der der vorigen Nummer festgestellt, dann kann man die Perspektive des Parallelepipeds nach den früheren Regeln finden.

Wir zeichnen nemlich (Fig. 229) den Horizont ξ , darauf den Augpunkt o_2 , dann das umgeklappte Auge o_1 so, dass die Distanz $o_1 o_2$ gleich der in der vorigen Nummer angenommen ist, hierauf die in der Tafel liegende Vertikalkante ae so gross, als sie nach dem (in der vorigen Nummer angenommenen) Verjüngungsmaßstab sein muss, und ausser dem so, dass a um 160^{cm} , gemessen nach demselben Maßstab, unter o_2 liegt, und dass die Abscisse von a (o_2 als Ursprung betrachtet) $= a_1 o_1$ der Fig. 228 ist. Endlich sind noch die umgeklappten Hauptstrahlen der Horizontalkanten unseres Objektes, nemlich $o_1 a$ und $o_1 b$ so zu zeichnen, dass sie mit ξ die Winkel bilden, welche in der Fig. 228 $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$ mit A_1 einschliessen. Wie man weiter verfährt, die Perspektive des Parallelepipeds zu konstruiren ist von früher her bekannt, und aus der Zeichnung zu ersehen. — Um den Punkt c' recht scharf zu erhalten, haben wir $a\alpha$ (α ist der Theilungspunkt, der dem Fluchtpunkt a entspricht) und die damit Parallele ac_α (ac_α ist offenbar $= a_1 c_1$ der vorigen Nr.) so gelegt, dass die Linie αc_α die aa fast rechtwinkelig schneidet, also $a\alpha$ nicht mit ξ zusammenfallen lassen, wesshalb es besonders angenehm ist, dass ae in der Tafel liegt und daher a die Spur der Linie ac ist. Ein Aehnliches ist in Bezug auf b' zu sagen.

Anm. Da der Beschauer der Perspektive sein Auge vor o_2 (und zwar in der gehörigen Distanz) aufstellen muss, so wird man das perspektivische Bild so an eine Wand hängen, dass

der in ihm liegende Horizont ξ in einer Höhe von 160^{cm} über dem Fussboden liegt. Wenn sich dann der Beschauer so aufstellt, dass sein Auge vor der Mitte der Bildbreite steht und etwa um die $1\frac{1}{2}$ fache Bildbreite davon entfernt, so hat er den rechten Standpunkt.

590. Wie aus Obigem hervorgeht ist die Distanz grösser als die Breite des Bildes. Führt man daher die Zeichnung auf einem Blatte aus, das nicht viel breiter als die Bildbreite ist, so fallen die Distanzpunkte und ausserdem viele Fluchtpunkte über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinaus, und man müsste dann Linien nach Punkten ziehen, die auf dem Blatte nicht gezeichnet sind. Um nun dennoch zum Ziele zu kommen, kann man folgendermassen verfahren. Man führt die in voriger Nummer beschriebene graphische Operation, wie auch wir es gethan haben, in einem verkleinerten Maassstabe aus. Zieht man nun von o_2 aus nach allen gefundenen Perspektiven von Punkten gerade Linien, die man von o_2 aus in demselben Verhältnisse vergrössert, als man in der Zeichnung den Maassstab verjüngt genommen hatte, so erhält man die verlangte Perspektive, deren Augpunkt wieder o_2 ist, deren Distanz aber in demselben Verhältniss grösser (als die der Zeichnung) ist, als sie ursprünglich in der Zeichnung verjüngt wurde.

Fig. 230.

591. Andere Mittel, um auf einem Blatte, auf dem die Distanzen verjüngt gegeben sind, und daher die Distanz- und Fluchtpunkte über die Grenzen des Blattes hinausfallen, dennoch Perspektiven finden zu können, sollen in Folgendem angegeben werden.

Ist ξ (Fig. 130) der Horizont und o_2 der Augpunkt, so macht man in der um ξ umgeklappten Horizontalebene $o_2 o_1$ nicht gleich der Distanz, sondern gleich einem bestimmten Theile z. B. (wie in unserer Zeichnung vorausgesetzt ist) gleich dem dritten Theile der Distanz, und eben so gross macht man dann auch $o_2 \omega$, so dass der Distanzpunkt nicht in ω liegt, sondern von o_2 um dreimal $o_2 \omega$ entfernt liegt.

Fig. 230.

592. Soll nun von einem Punkte a , der durch seinen Riss (a_2) und seine Distanz gegeben ist, die Perspektive gefunden werden, so trägt man, nicht, wie früher angegeben, diese ganze Distanz von a_2 horizontal auf, sondern hier nur ihren dritten

Theil ($\overline{a_2 a_\omega}$) und verbindet a_ω mit ω , so ist der Schnitt a' dieser Verbindungslinie mit $a_2 o_2$ die verlangte Perspektive. Denn man bekommt offenbar denselben Punkt, wenn man von o_2 nach links die wirkliche Distanz (also $3 \cdot \overline{o_2 \omega}$) und von a_2 nach rechts die wirkliche Distanz des Punktes a (also $3 \cdot \overline{a_2 a_\omega}$) aufgetragen.

Hieraus sieht man, dass es gar keine besondere Mühe macht mit verjüngter Distanz die Perspektiven von Punkten zu finden, nur ist zu wünschen, dass man im Besitze eines verstellbaren Proportionalzirkels ist. Stellt man diesen auf die angenommene Verjüngung ein, so darf man nur die wirklichen Distanzen mit den längeren Schenkeln messen, um mit den kürzeren dann die verjüngten unmittelbar auftragen zu können.

593. Hat man von einer Geraden A , die durch a geht, Fig. 230. die Perspektive zu suchen, so legt man durch o_1 eine Parallele zu A (den Hauptstral) so ist der Punkt a , in welchem sie den Horizont von A (hier ξ) trifft, nicht der Fluchtpunkt von A , sondern es ist der eigentliche Fluchtpunkt von o_2 um $3 \cdot \overline{o_2 a}$ entfernt. Um demnach A' zu finden muss man von a' nach einem Punkte der ξ ziehen, der um $3 \cdot \overline{o_2 a}$ von o_2 entfernt ist. Trägt man daher auf $o_2 a'$ eine Strecke $\overline{o_2 m} = \frac{\overline{o_2 a'}}{3}$ auf, so ist $A' \parallel m a$.

594. Sollte noch endlich auf die Gerade A von a aus eine Fig. 230. gegebene Strecke ab aufgetragen werden, so müssten wir, wenn unsere Distanzen keine verjüngten wären, zunächst den Theilungspunkt α (der Geraden A) suchen (s. 562—564), indem wir $\overline{a\alpha} = \overline{a o_1}$ machen. Zugleich wollen wir voraussetzen, weil sich dies hier als vortheilhaft herausstellt, dass wir α auf ξ annehmen. Dann wäre der Theilungsriss a_α auf A_2 so, dass α , a' und a_α in einer Geraden liegen. Macht man nun $\overline{a_\alpha b_\alpha} = \overline{ab}$ und zieht αb_α , so wäre der Schnitt von αb_α mit A' die Perspektive des gesuchten Punktes. So wäre es, wenn unsere Strecken nicht verjüngt wären; sie sind es aber, und zwar in unserem Falle $\frac{1}{3}$ der wirklichen Grösse. Dies gilt von $\overline{o_2 a}$, $\overline{a_2 a_\alpha}$, $\overline{a_\alpha b_\alpha}$ (von dieser Strecke setzen wir voraus, dass sie dem dritten Theil der gegebenen Strecke $\overline{ab}$ gleich sei). Demnach ist der wirkliche Theilungspunkt nicht α sondern der mit 3α bezeichnete Punkt (welcher von o_2 um $3 \cdot \overline{o_2 \alpha}$ entfernt ist); ebenso der wirkliche Theilungsriss von b nicht b_α , sondern der mit $3b_\alpha$ bezeichnete

Punkt (der von a_2 um $3 \cdot \overline{a_2 b_\alpha}$ entfernt ist), und ist daher der gesuchte Punkt b' der Schnitt von A' mit der Verbindungslinie der Punkte 3α und $3b_\alpha$. Betrachtet man aber den Punkt n , in welchem diese Verbindungslinie die $a_2 o_2$ schneidet, so sieht man (mit Hilfe der in unserer Zeichnung vorhandenen ähnlichen Dreiecke), dass die den verjüngten Distanzen entsprechende Linie αb_α denselben Punkt n liefert. Zieht man daher (wenn man die Punkte 3α oder $3b_\alpha$ nicht aufsuchen will oder kann) von n nach einem Punkte, der auf $\S$ von o_2 um $3 \cdot o_2 \alpha$ entfernt ist eine Gerade, so schneidet diese A' in b' . — Man sieht also:

Um auf eine Gerade A von a aus eine bei verjüngten Distanzen (z. B. $\frac{1}{3}$ wirklicher Grösse) eine ebenfalls verjüngt gegebene Strecke $\overline{ab}$ (so dass also die wirkliche Strecke $= 3 \cdot \overline{ab}$ ist) abzutragen verfahren wir zunächst ganz so, als ob die Distanzen nicht verjüngt wären (nur dass wir hier a auf $\S$ und a_α auf A_2 annehmen) suchen aber aus der Geraden αb_α zunächst den Punkt n , wo diese $a_2 o_2$ schneidet, und ziehen von n nach dem (mittelst α verjüngt gegebenen) Theilungspunkt. Wie dies auszuführen ist, haben wir in voriger Nummer gezeigt, wo wir von a' nach dem verjüngt gegebenen Fluchtpunkt gezogen haben.

595. Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass wenn erwachsene Personen von der Grösse des Beobachters auf einer Horizontalebene mit diesem stehen, die Augen derselben in einer Horizontalebene mit seinem Auge liegen; demnach liegen die Perspektiven dieser Augen im Horizont, gleichviel wie weit die Personen von der Tafel entfernt sind.

Nachtrag zur Schattenkonstruktion.

In Folge verschiedener Ausführungen von Schattirungen, die wir, seit dem der zweite Bogen des vorliegenden III. Bandes korrigirt ist, vorgenommen haben, finden wir uns veranlasst, die früher angegebene Ausführungsart ein klein wenig zu modifiziren. Wir wollen deshalb hier noch einmal zusammenhängend diese gegen früher theilweise modifizierte Ausführungsart von Schattirungen angeben.

Man zeichnet auf der ganzen zu schattirenden Fläche ausser dem absoluten höchsten Lichte (wenn ein solches vorhanden) und der Schattenlinie alle Isophoten von der Qualität 8, 6, 4 und 2 Zehntel, sodann auf der Lichtseite, so weit kein Schlagschatten liegt, noch die Isophoten 9, 7, 5, 3 und 1 Zehntel, hierauf aber noch auf der Selbstschattenseite die Isophote $\frac{1}{10}$ (also zwischen der Schattenlinie und der Isophote $\frac{2}{10}$; diese Isophote bildet die Modifikation der früheren Aufstellungen). Demnach ist die Lichtseite, so weit kein Schlagschatten darauf liegt, in 10 Zonen, so weit Schlagschatten sich darauf befindet, in 5 (Doppel) Zonen getheilt; dagegen die Selbstschattenseite in 6 Zonen (2 einfache und 4 Doppelzonen). Die Töne der aufeinanderfolgenden Zonen auf der Lichtseite heissen, vom höchsten Licht anfangend, T_0 , T_1 , T_2 T_9 , auf der Schattenseite, von der Schattenlinie anfangend: T_{10} , T_9 (für die beiden einfachen Zonen) T_8 , T_7 , T_6 , T_5 (für die 4 folgenden Doppelzonen); dagegen sollen die Töne im Schlagschatten auf der Lichtseite von der Schattenlinie anfangend, heissen: T_{10} , T_{11} , T_{12} , T_{13} , T_{14} .

Bei der Ausführung lassen wir die Zone T_0 (soll bedeuten die Zone mit dem Tone T_0) weiss, und überziehen alle andere Zonen mit einem schwachen Tuschtone t_1 ; dann alle Zonen mit Ausnahme der T_1 mit einem zweiten etwas verstärkten Tuschtone t_2 u. s. w. wie wir es früher angegeben. Nur wollen wir hier noch festsetzen, dass zwar, wie früher angegeben, t_3 stärker als t_2 , t_4 stärker als t_3 genommen wird, dass aber mit dieser Verstärkung nur fortgefahren werden soll, bis zu t_{10} , während die Tuschtöne t_{11} bis t_{14} gleich t_{10} bleiben. Im Uebrigen ist wie

früher $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$, ...
 $T_{14} = t_1 + t_2 + \dots + t_{14}$.

In untenstehender Figur sind die eben genannten Eintheilungen in Zonen, und die diesen Zonen entsprechenden Töne schematisch angegeben. Es sind darin die Doppelzonen von den einfachen Zonen durch doppelte Breite der ersteren im Vergleich mit den letzteren unterschieden. Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten die Tonstärken, so dass 1, 2, ... so viel als T_1 , T_2 etc. Die mittlere verstärkte Vertikallinie stellt die Schattenlinie vor und die mittlere Horizontallinie zur Linken bezeichnet die Schlagschattengrenze.

Licht											Schattenseite					
Lichtseite	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5
	14		13		12		11		10							

Schlagschatten

Klingensfeld, Friedrich A.,

Lehrbuch der darstellenden Geometrie

Bd.: 3

Nürnberg 1876

Math.p. 255 ta-3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11011172-6